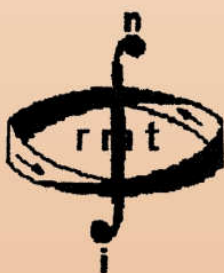


# МАТЕМАТИКА И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 14



Ярославль 2019

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Ярославский государственный технический университет»

**МАТЕМАТИКА  
И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

**ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА**

Выпуск 14

Ярославль  
Издательство ЯГТУ  
2019

УДК 51:378  
ББК 22.1  
М34

**М34 Математика и естественные науки. Теория и практика:** Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 14. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2019. – 252 с.

ISBN 978-5-9914-0761-8

В сборнике представлены научные статьи по актуальным вопросам математики, физики, информатики и методике преподавания, а также математического моделирования технических и технологических процессов и систем.

УДК 51:378  
ББК 22.1

Редакционная коллегия: А.Н. Жаров (председатель), Ю.К. Оленикова  
А. В. Бородин, Д.О. Бытев, В.Ш. Ройтенберг,  
И.М. Каневский.

Рецензенты: кафедра микроэлектроники и общей физики Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова;  
Д.Ф. Белоножко, д-р физ.-мат. наук, профессор Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

ISBN978-5-9914-0761-8

© Ярославский государственный  
технический университет, 2019

# МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

УДК 515.1

**М. А. Башкин**

Рыбинский государственный авиационный технический  
университет им. П. А. Соловьева  
Россия, г. Рыбинск, e-mail: m\_bashkin@list.ru

## ОДНОРОДНЫЕ НЕРАСЩЕПИМЫЕ СУПЕРМНОГООБРАЗИЯ, СВЯЗАННЫЕ С КОМПЛЕКСНОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПРЯМОЙ

*В работе приведены результаты классификации однородных нерасщепимых супермногообразий размерности  $1|4$  над комплексной проективной прямой.*

*Ключевые слова:* нерасщепимое однородное супермногообразие, ретракт, голоморфное векторное расслоение, касательный пучок.

**M. A. Bashkin**

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University  
Russia, Rybinsk, e-mail: m\_bashkin@list.ru

## HOMOGENEOUS NON-SPLIT SUPERMANIFOLDS, ASSOCIATED WITH THE COMPLEX PROJECTIVE LINE

*This paper contains the description of homogeneous non-split supermanifolds of dimension  $1|4$  over complex projective plane.*

*Keywords:* non-split homogeneous supermanifolds, retract, holomorphic vector bundle, tangent sheaf.

В статье рассматривается задача по классификации с точностью до изоморфизма однородных комплексных супермногообразий вида  $(M, O)$ , где  $M$  – заданное компактное комплексное однородное супермногообразие. Необходимые сведения по рассматриваемой теории можно найти в [1–5]. При  $M = \mathbb{C}P^1$  однородные расщепимые супермногообразия находятся во взаимно однозначном соответствии с невозрастающими наборами  $n$  неотрицательных целых чисел. В нерасщепимом случае классификация еще не закончена и сводится к некоторым достаточно сложным вычислениям с когомологиями расщепимых однородных супермногообразий со значениями в касательном пучке.

Хорошо известно, что любое голоморфное расслоение над комплексной проективной прямой единственным образом раскладывается в прямую сумму расслоений на прямые. Пусть  $L_k$  голоморфные векторные расслоения на прямые степени  $k$ . Рассмотрим голоморфное векторное расслоение ранга 4 вида

$$E = L_{-k_1} \oplus L_{-k_2} \oplus L_{-k_3} \oplus L_{-k_4}, \quad k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq k_4 \geq 0.$$

Обозначим  $\mathbf{CP}^{1|4}_{k_1, k_2, k_3, k_4}$  расщепимое супермногообразие, определяемое расслоением  $E$ .

Покроем  $\mathbf{CP}^1$  двумя аффинными картами  $U_0$  и  $U_1$  с локальными координатами  $x$  и  $y = 1/x$  соответственно. Тогда функции перехода супермногообразия  $\mathbf{CP}^{1|4}_{k_1, k_2, k_3, k_4}$  в  $U_0 \cap U_1$  имеют вид:

$$y = x^{-1}, \quad \eta_1 = x^{-k_1} \xi_1, \quad \eta_2 = x^{-k_2} \xi_2, \quad \eta_3 = x^{k_3} \xi_3, \quad \eta_4 = x^{-k_4} \xi_4,$$

где  $\xi_i$  и  $\eta_i$  – базисные сечения расслоения  $E$  над  $U_0$  и  $U_1$  соответственно.

Обозначим через  $T_{gr}$  градуированный касательный пучок супермногообразия  $\mathbf{CP}^{1|4}_{k_1, k_2, k_3, k_4}$  и через  $\mathcal{U}(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}_{gr})$  супералгебру Ли векторных полей на нем. Рассмотрим подпучок  $Aut_{(2)}\mathcal{O}_{gr} = \exp((T_{gr})_2 \oplus (T_{gr})_4)$  пучка  $Aut \mathcal{O}_{gr}$ . Согласно теореме Грина, множество супермногообразий с заданным ретрактом  $(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}_{gr})$  изоморфно множеству орбит группы  $Aut E$  на множестве  $H^1(\mathbf{CP}^1, Aut_{(2)}\mathcal{O}_{gr})$ . Будем описывать когомологии с помощью коциклов Чеха в покрытии  $U = \{U_0, U_1\}$ . Тогда (см. [5]), если  $H^0(\mathbf{CP}^1, (T_{gr})_2) = 0$ , то любой класс когомологий из  $H^1(\mathbf{CP}^1, Aut_{(2)}\mathcal{O}_{gr})$  представляется единственным коциклом вида  $z = \exp(u^2 + u^4)$ , где  $u^{2p} \in Q_{2p}$ ,  $Q_{2p}$  – подпространства в  $Z^1(U, (T_{gr})_{2p})$ , такие, что каждый класс когомологий из  $H^1(M, (T_{gr})_2)$  содержит ровно по одному коциклу из  $Q_{2p}$  ( $p = 1, 2$ ).

Можно доказать, что для супермногообразия  $\mathbf{CP}^{1|4}_{k_1, k_2, k_3, k_4}$  справедливо равенство  $H^0(\mathbf{CP}^1, (T_{gr})_2) = \{0\}$ . Будем говорить далее о задании супермногообразия с ретрактом  $\mathbf{CP}^{1|4}_{k_1, k_2, k_3, k_4}$  коциклом  $u^2 + u^4$ , подразумевая, что оно соответствует коциклу  $z = \exp(u^2 + u^4)$ .

В [5] показано, что однородные нерасщепимые супермногообразия существуют в следующих случаях:

- 1) для каждой из сигнатур  $(k+1, k, 1, 1)_{k>1}$ ,  $(k+3, k, 2, 2)_{k>1}$ ,  $(k+1, k, 2, 2)_{k>2}$ ,  $(k, k, 2, 2)_{k>3}$ ,  $(2, 2, 1, 0)$ ,  $(2, 2, 2, 1)$ ,  $(3, 2, 2, 0)$  существ-

вует единственное с точностью до изоморфизма однородное нерасщепимое супермногообразие;

2) для сигнатур  $(2, 2, 2, 2)$  и  $(3, 2, 2, 2)$  существует с точностью до изоморфизма два однородных нерасщепимых супермногообразия;

3) для сигнатуры  $(3, 3, 2, 2)$  существует с точностью до изоморфизма три однородных нерасщепимых супермногообразия;

4) для сигнатуры  $(2, 1, 1, 1)$  существует с точностью до изоморфизма восемь однородных нерасщепимых супермногообразий.

Результат данной работы состоит в том, что *однородные нерасщепимые супермногообразия существуют и в случае*

5) для сигнатуры  $(k_2 + k_3 + k_4 - 2, k_2, k_3, k_4)_{k_3 \geq 1, k_4 > 0}$ , отличной от сигнатуры  $(k, k, 1, 1)_{k \geq 1}$ , существует единственное однородное нерасщепимое супермногообразие, представимое коциклом

$$x^{-1} \xi_2 \xi_3 \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_1}.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башкин М.А. Однородные нерасщепимые супермногообразия с ретрактом  $\mathbf{CP}_{3,3,3,1}^{1|4}$  // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. С. 13–19.
2. Башкин М.А. Одно семейство однородных нерасщепимых супермногообразий над сферой Римана // Вест. РГТУ им. П.А.Соловьева. 2015. № 3(34). С. 125–129.
3. Башкин М.А. Четно-однородные нерасщепимые супермногообразия с ретрактом  $\mathbf{CP}_{k+1,k,3,1}^{1|4}$  при  $k \geq 3$  // Яросл. пед. вестн. 2010. Т.3, № 1. С. 37–41.
4. Башкин М.А. Однородные и четно-однородные супермногообразия с ретрактом  $\mathbf{CP}_{k,k,2,0}^{1|4}$  при  $k \geq 2$  // Моделирование и анализ информационных систем. Т.16, №3. 2009. С. 14–21.
5. Башкин М.А. Однородные нерасщепимые супермногообразия размерности  $1|4$  над комплексной проективной прямой / М.А. Башкин, А.Л. Онищик // Математика в Яросл. ун-те: сб. обзор. ст. к 30-летию математического факультета. Ярославль: ЯрГУ, 2006. С. 17–32.

УДК 517.954

**А. В. Бородин**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: [alvasborodin@mail.ru](mailto:alvasborodin@mail.ru)

## **БАРИСИНТЕЗ МНОГОМЕРНОГО ИЗОСПЕКТРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА**

*Методом барисинтеза из барилинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка получены многомерные изоспектральное уравнение Шредингера и уравнение типа Риккати. Для всех уравнений решена задача Коши с начальными данными на гиперплоскости.*

**Ключевые слова:** барилгебра, спектральная барилгебра, барисинтез, барилинейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, изоспектральное уравнение Шредингера, задача Коши.

**A. V. Borodin**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: [alvasborodin@mail.ru](mailto:alvasborodin@mail.ru)

## **THE BARISYNTHESIS OF A MULTIDIMENSIONAL ISOSPECTRAL SCHRÖDINGER EQUATION**

*A multidimensional isospectral Schrödinger equation and a Riccati type equation are obtained by the barisynthesis method from a second-order barilinear partial differential equation. For all equations, we solve the Cauchy problem with initial data on the hyperplane.*

**Keywords:** baryalgebra, spectral baryalgebra, barisynthesis, barilinear differential equation in partial derivatives of the second order, isospectral Schrödinger equation, Cauchy problem.

Введём необходимые определения и обозначения из [1, 2]. Пусть  $\mathbf{C}$  – поле комплексных чисел, а  $\langle \mathbf{C} \rangle = \mathbf{C} \langle 0 \rangle$  – его расширение посредством нестандартного нуля  $\langle 0 \rangle$  и нестандартной бесконечности  $\langle \infty \rangle = 1/\langle 0 \rangle$  (подробнее в [1-3]). Рассмотрим множество  $\langle \mathbf{C} \rangle^{n+1}$ , элементами которого являются конечные последовательности  $\langle x \rangle$  вида

$$\langle x \rangle = \langle x_0; \tilde{x} \rangle = \langle x_0; x_1, x_2, \dots, x_n \rangle, \quad (1)$$

где  $x_0 \in \langle \mathbf{C} \rangle$  – «выделенный» элемент,  $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\langle \mathbf{C} \rangle)^n$ ,

$$x_k \in \langle \mathbf{C} \rangle \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (1')$$

– барикоординаты (БК) бариэлемента (БЭЛ)  $\langle x \rangle$ .

Для БЭЛ (1) определяются баримоменты  $k$ -го порядка:

$$x^k = \mu^k(\langle x \rangle) = x_0 x_1 \cdots x_k \in \mathbf{C} \quad (k \in \mathbf{n} := \{0, 1, \dots, n\}),$$

посредством которых элемент (1) записывается в канонической форме:

$$\langle x \rangle = \langle x^0; x^1/x^0, x^2/x^1, \dots, x^n/x^{n-1} \rangle. \quad (2)$$

Таким образом, БЭЛ (1) однозначно соответствует стандартный  $(n+1)$ -мерный над полем  $\mathbf{C}$  элемент

$$\bar{x} := (x^0, x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbf{C}^{n+1} \quad (2')$$

и наоборот, стандартному  $(n+1)$ -мерному элементу (2') соответствует БЭЛ (2) (т.е.  $\langle \mathbf{C} \rangle^{n+1} \leftrightarrow \mathbf{C}^{n+1}$  – подробнее в [1, 2]). Поэтому БЭЛ  $\langle x \rangle$  и  $\langle y \rangle$  называются *бариравными*, если

$$\bar{x} = \bar{y}. \quad (3)$$

В согласии с (3) алгебраические операции над элементами множества  $\langle \mathbf{C} \rangle^{n+1}$  определяются так: ( $\forall \lambda \in \mathbf{C}, \langle x \rangle, \langle y \rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle^{n+1}$ )

$$\lambda \langle x \rangle = \langle \lambda x_0; \tilde{x} \rangle, \quad \mu^k(\langle x \rangle + \langle y \rangle) = \mu^k(\langle x \rangle) + \mu^k(\langle y \rangle) \quad (k \in \mathbf{n}); \quad (4)$$

$$\mu^k(\langle x \rangle \cdot \langle y \rangle) = \sum_{j=0}^k x^{k-j} y^j + s \sum_{j=k+1}^n x^{k-j+n+1} y^j, \quad (5)$$

где параметр  $s \in \mathbf{C}$  определяет  $s$ -*барипроизведение* двух элементов (при  $s = +1$  – *гиперболическое*, при  $s = -1$  – *эллиптическое*, при  $s = 0$  – *параболическое*). Операции (4), (5) удовлетворяют аксиомам коммутативной ассоциативной алгебры. При этом нулевым будет элемент вида  $\langle \tilde{0} \rangle = \langle 0; \tilde{x} \rangle$ , противоположным к  $\langle x \rangle = \langle x_0; \tilde{x} \rangle$  – элемент вида  $-\langle x \rangle = \langle -x_0; \tilde{x} \rangle$ , единицей – элемент вида  $\langle e \rangle = \langle e; \tilde{0} \rangle$  (сами элементы (1), (2) называются *БЭЛ  $n$ -го порядка*). Множество БЭЛ  $n$ -го порядка обозначается через  $\langle \mathbf{C} \rangle_s^n$  и называется  $s$ -*бариалгеброй* ( $s$ -БА)  $n$ -го *порядка* над полем  $\mathbf{C}$  (при  $s = +1$ ,  $s = -1$ ,  $s = 0$  – *гиперболической, эллиптической, параболической* соответ-



ственно). Понятно, что  $s$ -бариаалгебра  $\langle \mathbf{C} \rangle_s^n$  изоморфна  $s$ -алгебре  $\mathbf{C}_s^{n+1}$  ( $\langle \mathbf{C} \rangle_s^n \cong \mathbf{C}_s^{n+1}$ ) с операциями (4), (5). Поскольку исходное множество  $\mathbf{C}$  – алгебра с инволюцией:  $x \rightarrow x^*$  [8], то и  $\langle \mathbf{C} \rangle_s^n$  –  $s$ -алгебра с инволюцией  $\langle x \rangle \rightarrow \langle x \rangle^*$ :

$$\mu^0(\langle x \rangle^*) = (x^0)^*, \quad \mu^k(\langle x \rangle^*) = s^*(x^{n-k+1})^* \quad (k \in \mathbf{n}). \quad (6)$$

Тогда БЭЛ  $\langle x \rangle$  называется бариэрмитовым, если  $\langle x \rangle = \langle x \rangle^*$ , т.е. если

$$x^0 = (x^0)^*, \quad x^k = s^*(x^{n-k+1})^* \quad (k \in \mathbf{n}).$$

Рассмотрим бариунитарные ( $\langle \langle x \rangle \langle x \rangle^* = \langle x \rangle^* \langle x \rangle = \langle e \rangle$ ) БЭЛ:

$$\langle 1 \rangle_0 = \langle 1; \tilde{0} \rangle, \quad \langle 1 \rangle_k = \langle \langle 0 \rangle; 1, \dots, 1, \langle \infty \rangle, 0, \dots, 0 \rangle \quad (k \in \mathbf{n}), \quad (7)$$

где  $\langle \infty \rangle$  стоит на  $k$ -м месте. В силу (2), (3)  $\mu^j(\langle 1 \rangle_k) = \delta_k^j$ . Поэтому ввиду (4), (5)

$$\langle x \rangle = \sum_{k=0}^n x^k \langle 1 \rangle_k, \quad (8)$$

Поэтому (7) – это *естественный барибазис* в  $\langle \mathbf{C} \rangle_s^n$ , баримоменты (2) – *естественные барикоординаты* (БК<sub>e</sub>) БЭЛ (1) относительно барибазиса (7); (8) – бариразложение БЭЛ  $\langle x \rangle$  по барибазису (7). При этом подалгебру  $\langle \mathbf{C} \rangle^0 := \{ a \langle 1 \rangle_0 = \langle a; \tilde{0} \rangle : a \in \mathbf{C} \} \subset \langle \mathbf{C} \rangle_s^n$  можно (посредством очевидного изоморфизма) отождествить с полем  $\mathbf{C}$ . Наряду с барибазисом (7), в  $s$ -БА  $\langle \mathbf{C} \rangle_s^n$  (для простоты  $s = \pm 1$ ) существует *спектральный барибазис* (*гиперболический*, когда « $s = +$ », *эллиптический*, когда « $s = -$ »; см. [1, 2]):

$$\langle \varepsilon \rangle_k^\pm = (n+1)^{-1} \langle \pm 1; \varepsilon_k^\pm, \varepsilon_k^\pm, \dots, \varepsilon_k^\pm \rangle \quad (k \in \mathbf{n}), \quad (9)$$

$$\varepsilon_k^+ = \left( \sqrt[n+1]{+1} \right)_k = \exp\left( \frac{2k\pi}{n+1} i \right), \quad \varepsilon_k^- = \left( \sqrt[n+1]{-1} \right)_k = \exp\left( \frac{(2k+1)\pi}{n+1} i \right) \\ (k \in \mathbf{n}; i = \sqrt{-1}), \quad (9')$$

где элементы  $\langle \varepsilon \rangle_k^\pm$  обладают спектральными свойствами:

$$\langle \varepsilon \rangle_j^\pm \langle \varepsilon \rangle_k^\pm = \begin{cases} \langle \vec{0} \rangle, & \text{если } j \neq k, \\ \sum_{k=0}^n \langle \varepsilon \rangle_k^\pm = \langle 1 \rangle, & \\ \langle \varepsilon \rangle_k^\pm, & \text{если } j = k \end{cases} \quad (9'')$$

Относительно этого базиса имеет место *спектральное бариразложение*

$$(\forall \langle x \rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_s^n) \quad \langle x \rangle = \sum_{k=0}^n \lambda_\pm^k(\langle x \rangle) \langle \varepsilon \rangle_k^\pm, \quad (10)$$

где *спектральные барикоординаты* (БК<sub>c</sub>)

$$\lambda_\pm^k(\langle x \rangle) = \lambda_\pm^k(\bar{x}) = (n+1) \langle \langle x \rangle, \langle \varepsilon \rangle_k^\pm \rangle = \sum_{\beta=0}^n x^\beta (\varepsilon_k^\pm)^*{}^\beta \in \mathbf{C} \quad (11)$$

– это собственные (спектральные) значения БЭЛ  $\langle x \rangle$ , отвечающие его собственным элементам (9) (независящим от  $\langle x \rangle$ ), т. е.

$$\langle x \rangle \langle \varepsilon \rangle_k^\pm = \lambda_\pm^k(\langle x \rangle) \langle \varepsilon \rangle_k^\pm \quad (k \in \mathbf{n}), \quad (*)$$

а  $\langle \langle x \rangle, \langle y \rangle \rangle := \sum_{k=0}^n x^k (y^k)^* \in \mathbf{C}$  – *барискалярное произведение* БЭЛ  $\langle x \rangle$  и  $\langle y \rangle$ . Отметим, что собственные значения (11) являются корнями характеристического уравнения

$$P_{n+1}(\lambda; \langle x \rangle) \stackrel{def}{=} (\lambda)^{n+1} + \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \text{tr}_k(\langle x \rangle) (\lambda)^{n-k} = 0, \quad (11a)$$

где  $\text{tr}_k(\langle x \rangle)$  ( $k \in \mathbf{n}$ ) – след  $k$ -го порядка *барилейного оператора* умножения на БЭЛ  $\langle x \rangle$  (подробнее – в [1, 2]).

Связь между спектральными координатами  $\lambda_\pm^k = \lambda_\pm^k(\langle x \rangle)$  (из (10)) и барикоординатами  $x^k = x^k(\langle x \rangle)$  (из (8)) задаются формулами (11) и (11’):

$$x^\beta = (n+1)^{-1} \sum_{k=0}^n \lambda_\pm^k(\varepsilon_k^\pm)^\beta \quad (\beta \in \mathbf{n}). \quad (11')$$

В силу спектральных свойств (9’’) функционалы (11) являются  $\mathbf{C}$ -гомоморфизмами на  $s$ -бариалгебре  $\langle \mathbf{C} \rangle_s^n$  ( $\lambda_k^\pm(\langle x \rangle \langle y \rangle) = \lambda_k^\pm(\langle x \rangle) \lambda_k^\pm(\langle y \rangle)$ ) и потому справедливо мультипликативное равенство

$$\langle x \rangle \langle y \rangle = \sum_{k=0}^n \lambda_\pm^k(\langle x \rangle) \lambda_\pm^k(\langle y \rangle) \langle \varepsilon \rangle_k^\pm.$$

Кроме того, всякому  $\mathbf{C}$ -значному отображению  $f$ , определённому на точечном спектре

$$\sigma_{\pm}(\langle x \rangle) = \left\{ \left( \lambda_{\pm}^k(\langle x \rangle) = \sum_{j=0}^n x^j (\varepsilon_k^{\pm})^j \right)^*, k \in \mathbf{n} \right\} \subseteq \mathbf{C}$$

БЭЛ  $\langle x \rangle$ , отвечает  $\langle \mathbf{C} \rangle_s^n$ -значное бариотображение (БО)

$$\langle y \rangle = \langle f \rangle(\langle x \rangle) := \sum_{k=0}^n f(\lambda_{\pm}^k(\langle x \rangle)) \langle \varepsilon \rangle_k^{\pm} \in \langle \mathbf{C} \rangle_s^n, \quad (12)$$

определённое в  $\langle x \rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_s^n$ . Тем самым, БО (12) есть продолжение отображения  $f$  с алгебры  $\mathbf{C}$  на бариалгебру  $\langle \mathbf{C} \rangle_s^n$ . Понятно, что отображение (12) является частным случаем общего бариотображение (БО)

$$\langle f \rangle : \langle x \rangle \in \langle \mathcal{D} \rangle(\langle f \rangle) \rightarrow \langle y \rangle = \langle f \rangle(\langle x \rangle) \in \langle \mathcal{E} \rangle(\langle f \rangle), \quad (13)$$

где  $\langle \mathcal{D} \rangle(\langle f \rangle) \subseteq \langle \mathbf{C} \rangle_s^n$  – область определения, а  $\langle \mathcal{E} \rangle(\langle f \rangle) \subseteq \langle \mathbf{C} \rangle_r^m$  – множество значений бариотображения  $\langle f \rangle$ ,  $\langle \mathbf{C} \rangle_s^n$  и  $\langle \mathbf{C} \rangle_r^m$  – две бариалгебры. В *бари-координатной форме* или *на макроуровне* (относительно барибазиса (7) [1]) отображение (13) переписывается так:

$$\bar{y} = \bar{f}(\bar{x}) \quad (\bar{f} : \tilde{\mathcal{D}}(\bar{f}) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}(\bar{f})), \quad (13_1)$$

или

$$y^j = f^j(\bar{x}) = f^j(x^0, x^1, \dots, x^n) \in \tilde{\mathcal{E}}(\bar{f}^j) \subseteq \mathbf{C} \quad (j \in \mathbf{m} = \{0, 1, \dots, m\}),$$

где  $\bar{x} = (x^0, x^1, \dots, x^n) \in \tilde{\mathcal{D}}(\bar{f}) \subseteq \mathbf{C}^{n+1}$  ( $\tilde{\mathcal{D}}(\bar{f}) \cong \langle \mathcal{D} \rangle(\langle f \rangle)$ ),

$$\bar{y} = (y^0, y^1, \dots, y^m) \in \tilde{\mathcal{E}}(\bar{f}) \subseteq \mathbf{C}^{m+1} \quad (\tilde{\mathcal{E}}(\bar{f}) \cong \langle \mathcal{E} \rangle(\langle f \rangle)),$$

$$\bar{f}(\bar{x}) = (f^0, f^1, \dots, f^m)(\bar{x}).$$

В *бариспектральной форме* (относительно спектрального барибазиса (9), (9')) – так:

$$y_{\pm}^j = f_{\pm}^j(\bar{x}_{\pm}) = f_{\pm}^j(x_{\pm}^0, x_{\pm}^1, \dots, x_{\pm}^n) \in \mathbf{C} \quad (j \in \mathbf{m}), \quad (13_2)$$

где

$$\bar{x}_{\pm} = (x_{\pm}^0, x_{\pm}^1, \dots, x_{\pm}^n) \in \mathbf{C}^{n+1} \quad (x_{\pm}^k = \lambda_{\pm}^k(\langle x \rangle) \in \mathbf{C}, \quad k \in \mathbf{n}),$$

$$\bar{y}_{\pm} = (y_{\pm}^0, y_{\pm}^1, \dots, y_{\pm}^m) \in \mathbf{C}^{m+1} \quad (y_{\pm}^j = \lambda_{\pm}^j(\langle y \rangle) \in \mathbf{C}, \quad j \in \mathbf{m}),$$

такие, что (см. (10), (11))

$$\langle x \rangle = \sum_{k=0}^n x_{\pm}^k \langle \varepsilon \rangle_k^{\pm} \in \langle \mathcal{D} \rangle(\langle f \rangle), \quad \langle y \rangle = \sum_{k=0}^n y_{\pm}^k \langle \varepsilon \rangle_k^{\pm} \in \langle \mathcal{E} \rangle(\langle f \rangle).$$

Баринепрерывность в бариобласти  $\langle \mathcal{D} \rangle \subseteq \langle \mathbf{C} \rangle_s^n$  БО  $\langle f \rangle$  обозначается через  $\langle f \rangle \in \langle C \rangle_s(\langle \mathcal{D} \rangle)$ , а его баринепрерывная  $s$ -баридифференцируемость в  $\langle \mathcal{D} \rangle$  через  $\langle f \rangle \in \langle C \rangle_s^{(1)}(\langle \mathcal{D} \rangle)$  [1, 3].

БО  $\langle A \rangle : \langle \mathbf{C} \rangle_s^n \rightarrow \langle \mathbf{C} \rangle_r^m$  называется барилинейным над полем  $\mathbf{C}$ , если  $(\forall \langle x \rangle, \langle x' \rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_s^n, )(\forall \lambda \in \langle \mathbf{C} \rangle)$ :

$$\langle A \rangle(\langle x \rangle + \langle x' \rangle) = \langle A \rangle(\langle x \rangle) + \langle A \rangle(\langle x' \rangle), \quad \langle A \rangle(\lambda \cdot \langle x \rangle) = \lambda \cdot \langle A \rangle(\langle x \rangle)$$

БО  $\langle A \rangle : \langle \mathbf{C} \rangle_s^n \rightarrow \langle \mathbf{C} \rangle_s^n$  называется барилинейным над бариалгеброй  $\langle \mathbf{C} \rangle_s^n$ , если  $(\forall \langle x \rangle, \langle x' \rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_s^n) (\forall \langle a \rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_s^n)$ :

$$\langle A \rangle(\langle x \rangle + \langle x' \rangle) = \langle A \rangle(\langle x \rangle) + \langle A \rangle(\langle x' \rangle), \quad \langle A \rangle(\langle a \rangle \cdot \langle x \rangle) = \langle a \rangle \cdot \langle A \rangle(\langle x \rangle),$$

где « $\cdot$ » – символ либо гиперболического, либо эллиптического произведения.

Справедливы следующие утверждения [1, 3].

**Лемма 1.** БО  $\langle A \rangle : \langle \mathbf{C} \rangle_s^n \rightarrow \langle \mathbf{C} \rangle_s^n$  является барилинейным над полем  $\mathbf{C}$  тогда и только тогда, когда он относительно естественного базиса (7) задаётся матрицей  $(n+1)$ -го порядка  $A = (a_k^\beta)$ , т. е.  $(\forall \langle x \rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_s^n)$

$$\langle A \rangle(\langle x \rangle) = \sum_{k=0}^n x^k \langle a \rangle_k = \sum_{\beta=0}^n \sum_{k=0}^n (x^k a_k^\beta) \langle 1 \rangle_\beta, \quad (14)$$

где

$$\langle a \rangle_k = \langle A \rangle(\langle 1 \rangle_k) = \sum_{\beta=0}^n a_k^\beta \langle 1 \rangle_\beta \quad (k \in \mathbf{n}) \quad (14')$$

– барикомпоненты БО  $\langle A \rangle$ , а  $a_k^\beta$  ( $k, \beta \in \mathbf{n}$ ) – элементы (вообще говоря, произвольные) соответствующей  $\mathbf{C}$ -матрицы  $A$  ( $k$  – номер строки).

Если (см. (2), (2'), (13<sub>1</sub>), где для экономии места  $n = 2$ )  $\bar{x} = (x^0, x^1, x^2) \in \mathbf{C}^3$ ,  $\bar{y} = (y^0, y^1, y^2) \in \mathbf{C}^3$  – вектор-строки, то  $\bar{y} = \bar{x} \cdot A$ , а в развёрнутом виде

$$(y^0, y^1, y^2) = (x^0, x^1, x^2) \begin{pmatrix} a_0^0 & a_0^1 & a_0^2 \\ a_1^0 & a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^0 & a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}. \quad (14'')$$

Если же  $\bar{x} = (x^0, x^1, x^2)^T \in \mathbf{C}^3$ ,  $\bar{y} = (y^0, y^1, y^2)^T \in \mathbf{C}^3$  – вектор-столбцы, то

$$\begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

**Лемма 2.** БО  $\langle A \rangle : \langle \mathbf{C} \rangle_s^n \rightarrow \langle \mathbf{C} \rangle_s^n$  является барилинейным над бари-алгеброй  $\langle \mathbf{C} \rangle_s^n$  тогда и только тогда, когда он является оператором ба-риумножения на БЭЛ  $\langle a \rangle = \langle A \rangle \langle (1) \rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_s^n$ , т. е.  $(\forall \langle x \rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_s^n)$

$$\langle A \rangle \langle \langle x \rangle \rangle = \langle a \rangle \cdot \langle x \rangle \quad (15)$$

В этом случае можно показать, что матрица  $A$  из леммы 1 (для  $n = 1, 2$ ) имеет вид (при  $n = 1$  и  $n = 2$ )

$$A = \begin{pmatrix} a_0^0 & sa_1^0 \\ a_1^0 & a_0^0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_0^0 & sa_2^0 & sa_1^0 \\ a_1^0 & a_0^0 & sa_2^0 \\ a_2^0 & a_1^0 & a_0^0 \end{pmatrix} \quad (15')$$

(при больших  $n$  – аналогично). Следовательно,  $s$ -бариалгебра  $\langle \mathbf{C} \rangle_s^n$  изо-морфна  $s$ -алгебре матриц вида (15').

Рассмотрим теперь понятие барилинейного дифференциального оператора в частных производных  $N$ -го порядка (от  $\langle \mathbf{C} \rangle_s^m$ -значной бари-функции  $n$  вещественных переменных; подробнее в [1, 3]).

Пусть (для экономии места  $m = 1, n = 2$ , и см. (13))

$$\langle y \rangle = \langle f \rangle(x) = \langle f^0(x); f^1(x)/f^0(x) \rangle, \quad (16)$$

где  $x = (x_0, x_1, x_2)$  –  $\mathbf{R}^3$ -значный аргумент (независимая переменная),

$\langle y \rangle = \langle y_0; y_1 \rangle = \langle y^0; y^1/y^0 \rangle$  –  $\langle \mathbf{C} \rangle_s^1$ -значная функция (зависимая переменная). Тогда частная барипроизводная 1-го порядка от функции  $\langle f \rangle$  по  $\mathbf{R}$ -переменной  $x^k$  ( $k = 0, 1, 2$ ) имеет вид

$$\partial \langle f \rangle(x) / \partial x_k = \left\langle \partial f^0(x) / \partial x_k; \frac{\partial f^1(x) / \partial x_k}{\partial f^0(x) / \partial x_k} \right\rangle \quad (k = 0, 1, 2). \quad (17)$$

Рассмотрим БЛДУ 2-го порядка (бариааналог ДУ Гельмгольца):

$$\langle \Delta \rangle \langle f \rangle(x) = \langle A \rangle \langle f \rangle(x), \quad (18)$$

где

$$\langle \Delta \rangle \langle f \rangle(x) = \sum_{k=0}^2 \partial^2 \langle f \rangle(x) / (\partial x^k)^2 \quad (18')$$

– бариоператор Лапласа, в котором согласно (17)

$$\partial^2 \langle f \rangle(x) / (\partial x^k)^2 = \left\langle \partial^2 f^0(x) / (\partial x^k)^2; \frac{\partial^2 f^1(x) / (\partial x^k)^2}{\partial^2 f^0(x) / (\partial x^k)^2} \right\rangle \quad (k = 0, 1, 2); \quad (18'')$$

$\langle A \rangle$  – постоянный барилинейный оператор (БЛО) (14), которому отвечает матрица из (14'').

Относительно барибазиса (7) БЛДУ (18) переписется в форме равносильной эллиптической системы ДУ в частных производных 2-го порядка вида:

$$\Delta(f^0(x)) := \sum_{k=0}^2 \partial^2 f^0(x) / (\partial x_k)^2 = \sum_{k=0}^1 a_k^0 f^k(x), \quad (19_0)$$

$$\Delta(f^1(x)) := \sum_{k=0}^2 \partial^2 f^1(x) / (\partial x_k)^2 = \sum_{k=0}^1 a_k^1 f^k(x). \quad (19_1)$$

Простые фундаментальные барирешения БЛДУ (18) (следуя работе [8]), будем искать в форме барифункций

$$\langle f \rangle_k(x) = \langle z \rangle_k \exp(i(x, \xi)) \quad (k = 1, 2; i^2 = -1), \quad (20)$$

где  $\langle z \rangle_k = \langle z_k^0; z_k^1 / z_k^0 \rangle$  – собственные БЭЛ БЛО  $\langle A \rangle: \langle \mathbf{C} \rangle_s^1 \rightarrow \langle \mathbf{C} \rangle_s^1$  (или собственные вектора  $\bar{z}_k = (z_k^0, z_k^1)$  матрицы  $A: \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$ );  $(x, \xi) = \sum_{j=0}^2 x_j \xi_j^*$  – скалярное произведение в  $\mathbf{C}^3$ .

Подставим (20) в (18), получим

$$-\langle z \rangle_k \left( \sum_{j=0}^2 (\xi_j^*)^2 \right) \exp(i(x, \xi)) = \langle z \rangle_k \lambda_k \exp(i(x, \xi)),$$

где  $\lambda_k$  – соответствующее собственное значение БО  $\langle A \rangle$ . Отсюда

$$\sum_{j=0}^2 (\xi_j^*)^2 = -\lambda_k \quad (k = 1, 2),$$

и значит,

$$\xi_0^* = (-1)^\alpha \left( \sum_{j=1}^2 (\xi_j^*)^2 + \lambda_k \right)^{1/2} i \quad (\alpha = 0, 2; k = 1, 2). \quad (20')$$

Из (20), (20') вытекают искомые (простые) фундаментальные барирешения БЛДУ (18):

$$\begin{aligned} & \langle f \rangle_{\alpha k}(x_0, x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) = \\ & = \langle z \rangle_k \exp\left(i \left(\sum_{j=1}^2 x_j \xi_j^*\right) + (-1)^\alpha x_0 \left(\sum_{j=1}^2 (\xi_j^*)^2 + \lambda_k\right)^{1/2}\right) \\ & \quad (\alpha = 1, 2; k = 1, 2), \end{aligned} \quad (21)$$

где  $x_0, x_1, x_2$  и  $\xi_1, \xi_2$  – произвольные скалярные переменные, в частности, вещественные числа. В последнем случае

$$\begin{aligned} & \langle f \rangle_{\alpha k}(x_0, x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) = \\ & = \langle z \rangle_k \exp\left(i \left(\sum_{j=1}^2 x_j \xi_j\right) + (-1)^\alpha x_0 \left(\sum_{j=1}^2 (\xi_j)^2 + \lambda_k\right)^{1/2}\right) \\ & \quad (\alpha = 1, 2; k = 1, 2). \end{aligned} \quad (21')$$

Умножая (21') на произвольные (интегрируемые) скалярные функции  $C_{\alpha k}(\xi_1, \xi_2)$  ( $\alpha = 1, 2; k = 1, 2$ ) вещественных переменных  $\xi_1, \xi_2$ , интегрируя по  $(\xi_1, \xi_2) \in D \subseteq \mathbf{R}^2$  и суммируя по  $(\alpha = 1, 2; k = 1, 2)$ , получим решение БЛДУ (18):

$$\begin{aligned} \langle f \rangle(x) &= \langle f \rangle(x_0, x_1, x_2) = \\ & = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{k=1}^2 \int_D C_{\alpha k}(\xi_1, \xi_2) \langle f \rangle_{\alpha k}(x_0, x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Сужение этого решения на гиперплоскость  $x_0 = 0$  ( $D = \mathbf{R}^2$ ) имеет вид

$$\begin{aligned} & \langle f \rangle(0, x_1, x_2) = \\ & = \sum_{k=1}^2 \langle z \rangle_k \int_D C_k^+(\xi_1, \xi_2) \exp\left(i \left(\sum_{j=1}^2 x_j \xi_j\right)\right) d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned}$$

где

$$C_k^+(\xi_1, \xi_2) = C_{2k}(\xi_1, \xi_2) + C_{1k}(\xi_1, \xi_2) \quad (k = 1, 2). \quad (22')$$

Сужение же его частной производной по переменной  $x_0$  имеет вид

$$\begin{aligned} & \partial \langle f \rangle(0, x_1, x_2) / \partial x_0 = \\ & = \sum_{k=1}^2 \langle z \rangle_k \int_D C_k^-(\xi_1, \xi_2) \exp\left(i \left(\sum_{j=1}^2 x_j \xi_j\right)\right) d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned}$$

где для  $(k = 1, 2)$

$$C_k^-(\xi_1, \xi_2) = (C_{2k}(\xi_1, \xi_2) - C_{1k}(\xi_1, \xi_2)) \left( \sum_{j=1}^2 (\xi_j)^2 + \lambda_k \right)^{1/2}. \quad (22'')$$

Теперь рассмотрим для БЛДУ (18) *баризадачу Коши*, носителем данных которой служит гиперплоскость  $x_0 = 0$  ( $D = \mathbf{R}^2$ ):

$$\langle f \rangle_0(0, x_1, x_2) = \langle f \rangle_0(x_1, x_2), \quad (23)$$

$$\partial \langle f \rangle_0(0, x_1, x_2) / \partial x_0 = \langle f \rangle_1(x_1, x_2), \quad (23')$$

где  $\langle f \rangle_0(x_1, x_2)$  и  $\langle f \rangle_1(x_1, x_2)$  – заданные барифункции двух  $\mathbf{R}$ -переменных  $(x_1, x_2)$ . Согласно (22') и (22'')

$$\langle f \rangle_0(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^2 \langle z \rangle_k \hat{C}_k^+(x_1, x_2),$$

$$\langle f \rangle_1(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^2 \langle z \rangle_k \hat{C}_k^-(x_1, x_2),$$

или в барикоординатной форме

$$f_0^0(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^2 z_k^0 \hat{C}_k^+(x_1, x_2), \quad f_0^1(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^2 z_k^1 \hat{C}_k^+(x_1, x_2) \quad (k=1, 2); \quad (24)$$

$$f_1^0(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^2 z_k^0 \hat{C}_k^-(x_1, x_2), \quad f_1^1(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^2 z_k^1 \hat{C}_k^-(x_1, x_2) \quad (k=1, 2); \quad (24')$$

где для  $(k=1, 2)$

$$\hat{C}_k^\pm(x_1, x_2) = \int_D C_k^\pm(\xi_1, \xi_2) \exp\left(i \left( \sum_{j=1}^2 x_j \xi_j \right)\right) d\xi_1 d\xi_2 \quad (25)$$

– преобразования Фурье функций  $C_k^\pm(x_1, x_2)$  соответственно (предполагается, что функции  $C_k^+(\xi_1, \xi_2)$  и  $C_k^-(\xi_1, \xi_2)$ , будучи произвольными, удовлетворяют условиям существования преобразования Фурье [10]).

Решая системы (24) и (24') относительно  $\hat{C}_k^+(x_1, x_2)$  ( $k=1, 2$ ) и  $\hat{C}_k^-(x_1, x_2)$  ( $k=1, 2$ ), получим

$$\begin{aligned} \hat{C}_1^+(x_1, x_2) &= z_2^1 f_0^0(x_1, x_2) - z_2^0 f_0^1(x_1, x_2) / \Delta, \\ \hat{C}_2^+(x_1, x_2) &= z_1^0 f_0^0(x_1, x_2) - z_1^1 f_0^1(x_1, x_2) / \Delta; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_1^-(x_1, x_2) &= z_2^1 f_1^0(x_1, x_2) - z_2^0 f_1^1(x_1, x_2) / \Delta, \\ \hat{C}_2^-(x_1, x_2) &= z_1^0 f_1^0(x_1, x_2) - z_1^1 f_1^1(x_1, x_2) / \Delta; \end{aligned}$$



где постоянная

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1^0 & z_1^2 \\ z_2^0 & z_2^2 \end{vmatrix} = z_1^0 z_2^1 - z_2^0 z_1^1 \neq 0.$$

Подставляя найденные значения (26) в отношения (25) и решая полученные уравнения относительно  $C_k^\pm(\xi_1, \xi_2)$  ( $k=1, 2$ ) (посредством обратного преобразования Фурье [10]), найдём для ( $k=1, 2$ )

$$C_k^\pm(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_D \hat{C}_k^\pm(\xi_1, \xi_2) \exp\left(i\left(\sum_{j=1}^2 x_j \xi_j\right)\right) d\xi_1 d\xi_2. \quad (27)$$

Зная (27), из (22'), (22''), в свою очередь, находим

$$\begin{aligned} C_{\alpha k}(\xi_1, \xi_2) &= \\ &= \frac{1}{2} \left( C_k^+(\xi_1, \xi_2) + (-1)^\alpha C_k^-(\xi_1, \xi_2) \left( \sum_{j=1}^2 (\xi_j)^2 + \lambda_k \right)^{-1/2} \right) \quad (28) \\ &(\alpha = 1, 2; k = 1, 2). \end{aligned}$$

Наконец, подставляя функции (28) в формулу (22), получим бари-решение баризадачи Коши (18), (23), (23'). Тем самым, установлено следующее утверждение.

**Теорема 1.** Если начальные данные (23), (23') задачи Коши (18), (23), (23') таковы, что для функций (26) существует преобразование Фурье (27), то указанная задача (а вместе с ней и соответствующая задача Коши для эллиптической системы (19<sub>0</sub>)-(19<sub>1</sub>)) имеет решение (22), (28).

Следовательно, в рамках ограничений, указанных в теореме 1, формула (22) (в паре с формулами (21')) есть формула общего решения ДУ (18) (эллиптической системы ДУ (19<sub>0</sub>)-(19<sub>1</sub>)):

$$\begin{aligned} \langle f \rangle(x) &= \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{k=1}^2 \langle z \rangle_k \int_D C_{\alpha k}(\xi_1, \xi_2) E_{\alpha k}(x; \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (29) \\ E_{\alpha k}(x; \xi_1, \xi_2) &= \exp\left(i\left(\sum_{j=1}^2 x_j \xi_j\right) + (-1)^\alpha x_0 \left(\sum_{j=1}^2 (\xi_j)^2 + \lambda_k\right)^{1/2}\right) \\ &(\alpha = 1, 2; k = 1, 2). \quad (29') \end{aligned}$$

Вопрос о единственности решения задачи Коши (18), (23), (23') пока остаётся открытым.

**Замечание 1.** Полученные результаты остаются в силе для  $\langle \mathbf{C} \rangle_s^m$ -значной барифункции  $\langle y \rangle = \langle f \rangle(x^0, x^1, \dots, x^n)$  и скалярных переменных.

Вернёмся к БЛДУ (18), точнее, к эквивалентной ему системе ДУ (19<sub>0</sub>)-(19<sub>1</sub>) (но уже, не требуя постоянства БЛО  $\langle A \rangle : \langle \mathbf{C} \rangle_s^1 \rightarrow \langle \mathbf{C} \rangle_s^1$ ):

$$\sum_{k=0}^2 \partial^2 f^0(x)/(\partial x_k)^2 = \sum_{k=0}^1 a_k^0(x) f^k(x), \quad (30_0)$$

$$\sum_{k=0}^2 \partial^2 f^1(x)/(\partial x_k)^2 = \sum_{k=0}^1 a_k^1(x) f^k(x). \quad (30_1)$$

Переведём эту систему с языка бариперемнных (2) на язык обычных (исходных) переменных (1), а именно, по определению (2)

$$f^0(x) = f_0(x), \quad f^1(x) = f_0(x)f_1(x), \quad f^2(x) = f_0(x)f_1(x)f_2(x), \dots$$

Поэтому уравнения (30<sub>0</sub>)-(30<sub>1</sub>) примут вид

$$\sum_{k=0}^2 \partial^2 f_0(x)/(\partial x_k)^2 = a_0^0(x)f_0(x) + a_1^0(x)f_0(x)f_1(x),$$

$$\sum_{k=0}^2 \partial^2 f_0(x)f_1(x)/(\partial x_k)^2 = a_0^1(x)f_0(x) + a_1^1(x)f_0(x)f_1(x),$$

или (для краткости опуская аргумент  $x = (x_0, x_1, x_2)$ ) вид

$$\Delta f_0 = a_0^0 f_0 + a_1^0 f_0 f_1,$$

$$f_1 \Delta f_0 + f_0 \Delta f_1 + 2 \sum_{k=0}^2 \frac{\partial f_0}{\partial x_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} = a_0^1 f_0 + a_1^1(x) f_0 f_1,$$

или

$$\Delta f_0 - (a_0^0 + a_1^0 f_1) f_0 = 0, \quad (31_0)$$

$$\Delta f_1 + 2 \sum_{k=0}^2 \frac{\partial \ln |f_0|}{\partial x_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + a_1^0 (f_1)^2 + (a_0^0 - a_1^1) f_1 - a_0^1 = 0. \quad (31_1)$$

Таким образом, относительно исходных переменных БЛДУ (18) (или, что то же самое, эллиптическая система ДУ (19<sub>0</sub>)-(19<sub>1</sub>)) эквивалентна (при  $m=1$ ) системе (31<sub>0</sub>)-(31<sub>1</sub>) ДУ в частных производных 2-го порядка от  $n=3$  вещественных переменных  $x_0, x_1, x_2$ , где первое ДУ (31<sub>0</sub>) – это стационарное ДУ Шредингера (относительно волновой функции  $f_0(x)$ ) с потенциалом

$$U(x) = a_1^0(x) f_1(x) \quad (32)$$

и собственным значением (энергией, когда  $a_0^0$  – величина постоянная)

$$E = -a_0^0; \quad (32')$$

второе ДУ (31<sub>1</sub>) — это нелинейное ДУ типа Риккати, решение которого  $f_1(x)$  составляет существенную часть потенциала (32).

Поскольку собственное значение (32') не зависит от постоянных (28), определяющих функцию  $f_1(x)$ , то ДУ Шредингера (31<sub>0</sub>) является *изоспектральным* (см. [4, 9], там же о важности таких ДУ), а метод, которым оно получено, называется *барисинтезом* [1, 6].

Из формулы (29) (общего решения системы ДУ (19<sub>0</sub>)-(19<sub>1</sub>)) нетрудно получить формулы общего решения системы ДУ (31<sub>0</sub>)-(31<sub>1</sub>):

$$f_0(x) = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{k=1}^2 z_k^0(x) \int_D C_{\alpha k}(\xi_1, \xi_2) E_{\alpha k}(x; \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (33_0)$$

$$f_1(x) = \frac{\sum_{\alpha=1}^2 \sum_{k=1}^2 z_k^1(x) \int_D C_{\alpha k}(\xi_1, \xi_2) E_{\alpha k}(x; \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sum_{\alpha=1}^2 \sum_{k=1}^2 z_k^0(x) \int_D C_{\alpha k}(\xi_1, \xi_2) E_{\alpha k}(x; \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}. \quad (33_1)$$

Отсюда, в свою очередь, несложно посредством формул (28) получить решение задачи Коши для системы ДУ (31<sub>0</sub>)-(31<sub>1</sub>). Это решение по форме ни сколько не отличается от отношений (33<sub>0</sub>)-(33<sub>1</sub>), поскольку содержание этого решения определяется только содержанием постоянных  $C_{\alpha k}(\xi_1, \xi_2)$  ( $\alpha = 1, 2; k = 1, 2$ ), полученным ими по формулам (28).

Далее, в случае, когда БЛО  $\langle A \rangle$  является оператором бариумножения на БЭЛ  $\langle a \rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_s^1$  и значит соответствующая ему матрица  $A$  имеет (см. лемму 2) вид

$$A = \begin{pmatrix} a_0^0 & sa_1^0 \\ a_1^0 & a_0^0 \end{pmatrix},$$

то ДУ Шредингера (31<sub>0</sub>) *не меняется*, а уравнение (31<sub>1</sub>) принимает следующую более ограниченную форму:

$$\Delta f_1 + 2 \sum_{k=0}^2 \frac{\partial \ln |f_0|}{\partial x_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + a_1^0 (f_1)^2 - s a_1^0 = 0.$$

Здесь уместно отметить, что параметр  $s$  может быть любым комплексным числом и это обстоятельство несколько смягчает указанное ограничение.

Из сказанного следует, что потенциалу (32), где множитель  $f_1(x)$  в форме дроби (33<sub>1</sub>), отвечает волновая функция  $f_0(x)$  (решение ДУ Шредингера (31<sub>0</sub>)) совпадающая со знаменателем этой дроби. При этом, если  $g_0(x)$  и  $g_1(x)$  другая подобная пара функций, то (в силу барилинейности исходного ДУ (18)) такой же будет пара функций

$$h_0(x) = c f_0(x) + d g_0(x), \quad h_1(x) = \frac{c f_0(x) f_1(x) + d g_0(x) g_1(x)}{c f_0(x) + d g_0(x)},$$

где  $c$  и  $d$  – произвольные постоянные. Эти отношения можно интерпретировать как своеобразные групповые свойства изоспектрального ДУ Шредингера (31<sub>0</sub>).

Теперь отметим (см. замечание 2 в [5]), что  $\langle \mathbf{C} \rangle_s^1$  – барианалог проективного пространства размерности  $m = 1$  (над полем  $\mathbf{C}$ ). Поэтому небезынтересно рассмотреть БЛДУ (18) в базовом баривекторном пространстве (ББВП)  $\langle \dot{\mathbf{C}} \rangle^{m+1}$  барипроективного пространства (БПП)  $\langle \dot{\mathbf{C}} \rangle_m$  размерности  $m \geq 2$ , элементами которого являются бариобъекты вида (подробнее в [5]):

$$\langle x \rangle = \langle x_0; x_1, x_2, \dots, x_m \rangle = \langle x_0^0; x_0^1/x_0, x_0^2/x_0, \dots, x_0^m/x_0 \rangle, \quad (34)$$

где

$$x_0^0 = \mu_0^0(\langle x \rangle) := x_0 \in \mathbf{C}, \quad x_0^k = \mu_0^k(\langle x \rangle) := x_0 x_k \in \mathbf{C} \\ (k = 1, 2, \dots, m)$$

– проективные баримоменты (или однородные барикоординаты) БЭ (34). При этом для любого  $\lambda \in \mathbf{C}$  и любых

$$\langle x \rangle = \langle x_0; x_1, x_2, \dots, x_m \rangle \in \langle \dot{\mathbf{C}} \rangle^{m+1}, \\ \langle y \rangle = \langle y_0; y_1, y_2, \dots, y_m \rangle \in \langle \dot{\mathbf{C}} \rangle^{m+1}$$

определены операции:

$$\lambda \langle x \rangle := \langle \lambda x_0; x_1, x_2, \dots, x_m \rangle, \\ \langle x \rangle + \langle y \rangle := \left\langle x_0 + y_0; \frac{x_0^1 + y_0^1}{x_0 + y_0}, \frac{x_0^2 + y_0^2}{x_0 + y_0}, \dots, \frac{x_0^m + y_0^m}{x_0 + y_0} \right\rangle, \\ \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle := \left\langle x_0 y_0; \frac{x_0 y_0^1 + y_0 x_0^1}{x_0 y_0}, \frac{x_0 y_0^2 + y_0 x_0^2}{x_0 y_0}, \dots, \frac{x_0 y_0^m + y_0 x_0^m}{x_0 y_0} \right\rangle = \\ = \langle x_0 y_0; x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m \rangle.$$

Дальше, ради экономии места, но без снижения общности,  $m = 2$ . В этом случае идейная сторона барианализа БЛДУ (18) подобна описанной

выше для  $m = 1$ . Однако содержание получаемых отношений заметно шире и полнее. А именно, в БЛДУ 2-го порядка (18) ((18'), (18'')) имеет вид

$$\sum_{k=0}^2 \partial^2 \langle f \rangle (x) / (\partial x^k)^2 = \left\langle \frac{\sum_{k=0}^n a_k^0 f_0^k}{\sum_{k=0}^n a_k^1 f_0^k}, \frac{\sum_{k=0}^n a_k^1 f_0^k}{\sum_{k=0}^n a_k^2 f_0^k}, \frac{\sum_{k=0}^n a_k^2 f_0^k}{\sum_{k=0}^n a_k^0 f_0^k} \right\rangle,$$

а потому эллиптическая система ДУ в частных производных 2-го порядка ДУ (19<sub>0</sub>)-(19<sub>1</sub>) принимает вид

$$\sum_{k=0}^2 \partial^2 f^0(x) / (\partial x_k)^2 = \sum_{k=0}^2 a_k^0 f^k(x), \quad (35_0)$$

$$\sum_{k=0}^2 \partial^2 f^1(x) / (\partial x_k)^2 = \sum_{k=0}^2 a_k^1 f^k(x), \quad (35_1)$$

$$\sum_{k=0}^2 \partial^2 f^2(x) / (\partial x_k)^2 = \sum_{k=0}^2 a_k^2 f^k(x), \quad (35_2)$$

соответственно система ДУ (31<sub>0</sub>)-(31<sub>1</sub>) вид

$$\Delta f_0 - (a_0^0 + a_1^0 f_1 + a_2^0 f_2) f_0 = 0, \quad (36_0)$$

$$\begin{aligned} \Delta f_1 + 2 \sum_{k=0}^2 \frac{\partial \ln |f_0|}{\partial x_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + (a_0^0 + a_1^0 f_1 + a_2^0 f_2) f_1 - \\ - (a_0^1 + a_1^1 f_1 + a_2^1 f_2) = 0, \end{aligned} \quad (36_1)$$

$$\begin{aligned} \Delta f_2 + 2 \sum_{k=0}^2 \frac{\partial \ln |f_0|}{\partial x_k} \frac{\partial f_2}{\partial x_k} + (a_0^0 + a_1^0 f_1 + a_2^0 f_2) f_2 - \\ - (a_0^2 + a_1^2 f_1 + a_2^2 f_2) = 0. \end{aligned} \quad (36_2)$$

Таким образом, увеличение размерности  $m$  барипроективного пространства  $\langle \dot{\mathbf{C}} \rangle_m$  (соответственно ББВП  $\langle \dot{\mathbf{C}} \rangle^{m+1}$ ) влечёт за собой расширения как самого ДУ Шредингера (31<sub>0</sub>) до ДУ (36<sub>0</sub>) и его потенциала (32) до

$$U(x) = a_1^0(x) f_1(x) + a_2^0(x) f_2(x) = U_1(x) + U_2(x), \quad (37)$$

так и определяющих этот потенциал нелинейных типа Риккати ДУ в частных производных 2-го порядка (36<sub>1</sub>), (36<sub>2</sub>). При этом следует отметить, что указанное расширения не сказываются на величине собственного значения (32'), а значит и свойстве «быть изоспектральным».

К этому следует добавить, что общее решение (а с ним и решение задачи Коши) БЛДУ 2-го порядка (18) ((18'), (18'')) определяются по той же формуле (29) ((29')), но с увеличением на единицу верхней границы индекса  $k$  :

$$\langle f \rangle(x) = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{k=1}^3 \langle z \rangle_k \int_D C_{\alpha k}(\xi_1, \xi_2) E_{\alpha k}(x; \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (38)$$

или развёрнутом виде

$$f_0(x) = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{k=1}^3 z_k^0(x) \int_D C_{\alpha k}(\xi_1, \xi_2) E_{\alpha k}(x; \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (38_0)$$

$$f_1(x) = \frac{\sum_{\alpha=1}^2 \sum_{k=1}^3 z_k^1(x) \int_D C_{\alpha k}(\xi_1, \xi_2) E_{\alpha k}(x; \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sum_{\alpha=1}^2 \sum_{k=1}^3 z_k^0(x) \int_D C_{\alpha k}(\xi_1, \xi_2) E_{\alpha k}(x; \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}, \quad (38_1)$$

$$f_2(x) = \frac{\sum_{\alpha=1}^2 \sum_{k=1}^3 z_k^2(x) \int_D C_{\alpha k}(\xi_1, \xi_2) E_{\alpha k}(x; \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sum_{\alpha=1}^2 \sum_{k=1}^3 z_k^0(x) \int_D C_{\alpha k}(\xi_1, \xi_2) E_{\alpha k}(x; \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}, \quad (38_2)$$

где для  $(\alpha = 1, 2; k = 1, 2, 3)$

$$E_{\alpha k}(x; \xi_1, \xi_2) = \exp\left(i \left(\sum_{j=1}^2 x_j \xi_j\right) + (-1)^\alpha x_0 \left(\sum_{j=1}^2 (\xi_j)^2 + \lambda_k\right)^{1/2}\right), \quad (39)$$

$\lambda_k$  – собственные значения, а  $\langle z \rangle_k$  – соответствующие собственные бари-элементы БЛО  $\langle A \rangle : \langle \dot{\mathbf{C}} \rangle^{m+1} \rightarrow \langle \dot{\mathbf{C}} \rangle^{m+1}$  ( $m = 2$ ).

Следовательно, при переходе от БПП  $\langle \dot{\mathbf{C}} \rangle_1$  к БПП  $\langle \dot{\mathbf{C}} \rangle_m$  все результаты, включая теорему 1, остаются в силе. Более того к ним добавилось новое отношение (37).

В заключение отметим, что роль спектрального барианализа (см. определения и отношения (9)–(12) настоящей работы) в барисинтезе линейных и нелинейных уравнений математической физики будет освещена в последующей работе автора (см. также [1– 7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бородин А.В.* Многомерный барианализ и его приложения. Ч. 1. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2005. 432 с.
2. *Бородин А.В.* Частично квазисвязные множества и барианализ (приложения). Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2013. 484 с.
3. *Бородин А.В.* Барианализ и  $N$ -мерные конформные отображения. I // Математика и естественные науки. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Вып.13. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2018. С. 9–26.
4. *Бородин А.В.* Одномерный барилинейный анализ и изоспектральные уравнения Шредингера. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 1997. 177 с.
5. *Бородин А.В.* Барианализ и проективные пространства // Математика и естественные науки. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Вып.10. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2015. С. 9–31.
6. *Бородин А.В.* Метод спектрального барисинтеза и вложение  $n$ -мерного диффеоморфизма в векторное поле // Яросл. пед. вестник. 2013. Т. 3 (Естественные науки), №3. С. 61–67.
7. *Бородин А.В.* Барианализ уравнений типа КДФ-Бюргера // Вестник Нижегородского ун-та им Р.И. Лобачевского: сер. Маг. моделирование и оптимальное управление. Нижний Новгород: Изд-во: НИНГУ им. Лобачевского, 2003. № 3. С. 76–92.
8. *Бородин А.В.* Математическая модель переноса в анизотропной среде с конечной скоростью передачи информации. // Исследование нелинейных динамических систем: Межвуз. сб. тр. / под ред. д-ра физ.-мат. наук В.В. Риделя. М.: МГУПС, 2013. Вып. 3. С. 56–68.
9. *Додд Р.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. М.: Мир, 1988. 694 с.
10. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. М.: Наука», 1976. 543 с.

УДК 514.76

**А. В. Букушева**

Саратовский национальный исследовательский государственный  
университет им. Н.Г. Чернышевского  
Россия, г. Саратов, e-mail: bukusheva@list.ru

## **ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУБРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ**

*Изучаются сечения распределений субримановых многообразий. Доказывается, что образ сечения является геодезическим подмногообразием распределения, если сечение ковариантно постоянно и производная Ли от метрического тензора равна нулю.*

**Ключевые слова:** субриманово многообразие, сечение распределения, вполне геодезическое подмногообразие.

**A. V. Bukusheva**

G.N. Chernyshevsky National Research Saratov State University  
Russia, Saratov, e-mail: bukusheva@list.ru

## **GEODESIC SUBMANIFOLDS OF DISTRIBUTIONS OF SUB-RIEMANNIAN MANIFOLD**

*The sections of distributions of sub-Riemannian manifolds are studied. It is proved that the image of a section is a geodesic submanifold of the distribution if the section is covariantly constant and the Lie derivative of the metric tensor is zero.*

**Keywords:** sub-Riemannian manifold, distribution section, completely geodesic submanifold.

### **Введение**

Геометрия сечений касательных расслоений с метрикой Сасаки изучалась в работах [10, 12]. Так, например, в работе [12] было показано, что ковариантно постоянное векторное поле определяет вполне геодезическое подмногообразие касательного расслоения. Автором статьи изучались сечения распределения субриманова многообразия контактного типа [5]. Предварительно на распределении с помощью внутренней связности задавалась риманова метрика типа Сасаки. В работе [5] доказана теорема, утверждающая, что для допустимого ковариантно постоянного векторного поля  $\vec{u} \in \Gamma(D)$  в случае интегрируемого распределения  $D$  условие  $\partial_n g = 0$  является необходимым условием для того, чтобы подмногообразие  $\vec{u}(Y) \subset D$  было вполне геодезическим подмногообразием. Здесь  $Y \subset M$  –



интегральное подмногообразие максимальной размерности распределения  $D$ . В настоящей работе интегрируемость распределения  $D$  не предполагается. В статье находятся условия, при которых сечение  $\vec{u}: M \rightarrow D$  задает вполне геодезическое подмногообразие  $\vec{u}(M)$  многообразия  $D$ .

### 1. Продолженные субримановы структуры

Рассмотрим субриманову структуру  $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$ , заданную на гладком многообразии  $M$  размерности  $n$ . Здесь  $\eta$  и  $\vec{\xi}$  1-форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения  $D$  и  $D^\perp$ . Внутренней линейной связностью  $\nabla$  [1-4] на субримановом многообразии называется отображение  $\nabla: \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D)$ , удовлетворяющее свойствам:

$$1) \nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}},$$

$$2) \nabla_{\vec{x}}f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y},$$

$$3) \nabla_{\vec{x}}(\vec{y} + \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z},$$

где  $\Gamma(D)$  – модуль допустимых векторных полей [4].

На протяжении всей работы будем использовать адаптированные координаты. Карта  $k(x^\alpha)$  ( $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$ ;  $a, b, c = 1, \dots, n-1$ ;  $i, j, k = 2n-1$ ) называется адаптированной к распределению  $D$ , если  $\partial_n = \vec{\xi}$  [6-9]. Векторные поля  $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ , где  $P: TM \rightarrow D$  – проектор, определяемый разложением  $TM = D \oplus D^\perp$ , линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение  $D: D = \text{span}(\vec{e}_a)$ .

Коэффициенты внутренней линейной связности задаются соотношениями  $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c\vec{e}_c$ . Формула преобразования для коэффициентов внутренней связности записывается в виде

$$\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'}A_b^{b'}A_c^{c'}\Gamma_{a'b'}^{c'} + A_c^{c'}\vec{e}_a A_b^{c'}.$$

Кручением и кривизной внутренней связности называются, соответственно, допустимые тензорные поля [11]:

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}],$$

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}],$$

где  $Q = I - P$ ,  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$ . Здесь  $R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$  – тензор кривизны субриманова многообразия (тензор Схоутена).

Векторные поля  $(\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a}) = (A_i)$  задают [4] на распределении  $D$  адаптированное поле базисов.

Зададим на многообразии  $D$  метрику типа Сасаки, полагая

$$\tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) = \tilde{g}(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = g_{ab},$$

$$\tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) = \tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n) = \tilde{g}(\partial_n, \partial_{n+b}) = 0, \quad \tilde{g}(\partial_n, \partial_n) = 1.$$

**Предложение 1** [11]. Пусть  $\nabla$  – внутренняя связность с тензором кривизны Схоутена  $R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$ . Тогда для всех  $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$  и  $\vec{p} \in D$  имеют место следующие равенства:

$$[\vec{x}^h, \vec{y}^h]_{\vec{p}} = [\vec{x}, \vec{y}]^h - \{R(\vec{x}, \vec{y})\vec{p}\}^v, [\vec{x}^h, \vec{\xi}^h]_{\vec{p}} = [\vec{x}, \vec{\xi}]^h + \{P(\vec{x}, \vec{p})\}^v,$$

$$[\vec{x}^h, \vec{y}^v] = (\nabla_{\vec{x}}\vec{y})^v,$$

$$[\vec{x}^v, \vec{\xi}^h] = [\vec{x}, \vec{\xi}]^v.$$

В координатах эти равенства переписываются в виде:

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n + x^{n+d}R_{bad}^c\partial_{n+c},$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_n] = x^{n+d}\partial_n\Gamma_{aa}^c\partial_{n+c},$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c\partial_{n+c},$$

где  $R_{bad}^c$  – компоненты тензора Схоутена в адаптированных координатах [7]:  $R_{abc}^d = 2\vec{e}_{[a}\Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e|}^d\Gamma_{b]c}^e$ .

**Предложение 2** [7]. Коэффициенты  $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$  связности Леви-Чивита на многообразии  $D$  в адаптированных координатах получают следующее представление:

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c, 2\tilde{\Gamma}_{ab}^{n+c} = R_{bad}^c x^{n+d}, \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \Gamma_{ab}^n,$$

$$2\tilde{\Gamma}_{a,n+b}^c = R_{bda}^c x^{n+d}, 2\tilde{\Gamma}_{n+a,b}^c = R_{adb}^c x^{n+d},$$

$$\tilde{\Gamma}_{a,n+b}^{n+c} = \Gamma_{ab}^c, 2\tilde{\Gamma}_{a,n+b}^n = 2\tilde{\Gamma}_{n+b,a}^n = P_{ac}^e x^{n+c} g_{eb},$$

$$\tilde{\Gamma}_{n+a,n+b}^n = C_{ab}, \tilde{\Gamma}_{an}^c = \tilde{\Gamma}_{na}^c = \Gamma_{na}^c, 2\tilde{\Gamma}_{an}^{n+c} = -2\tilde{\Gamma}_{na}^{n+c} = P_{ac}^d x^{n+d},$$

$$2\tilde{\Gamma}_{n+a,n}^c = 2\tilde{\Gamma}_{n,n+a}^c = g^{cd} P_{db}^e x^{n+b} g_{ae}, \tilde{\Gamma}_{n+a,n}^{n+b} = \tilde{\Gamma}_{n,n+a}^{n+b} = C_a^b.$$

При доказательстве использовалось выражение для коэффициентов связности:

$$2\Gamma_{ij}^m = g^{km}(A_i g_{jk} + A_j g_{ik} - A_k g_{ij} + \Omega_{kj}^l g_{li} + \Omega_{ki}^l g_{lj}) + \Omega_{ij}^m,$$

где  $\Omega_{ab}^n = 2\omega_{ba}$ ,  $\Omega_{ab}^{n+c} = R_{bad}^c x^{n+d}$ ,  $\Omega_{a,n+b}^{n+c} = \Gamma_{ab}^c$ ,  $\Omega_{an}^{n+c} = \partial_n \Gamma_{ab}^c x^{n+b}$ .

Пусть  $\vec{u} \in \Gamma(TM)$  – допустимое векторное поле [11].

**Предложение 3.** Для допустимого векторного поля  $\vec{u} \in \Gamma(D)$  и внутренней линейной связности  $\nabla$  на субримановом многообразии  $M$  имеет место следующее равенство:

$$2\nabla_{[a}\nabla_{b]}u^c = R_{abd}^c u^d + 2\omega_{ab}\partial_n u^c.$$

## 2. Вполне геодезические подмногообразия распределения субриманова многообразия

**Предложение 4.** Пусть  $\vec{u} \in \Gamma(D)$  – допустимое векторное поле и  $\nabla$  – внутренняя линейная связность на субримановом многообразии  $M$ . Тогда для любого допустимого вектора  $\vec{v}$  выполняется следующее равенство:

$$\vec{v}^h + (\nabla_{\vec{v}} \vec{u})^v = \vec{u}_* \vec{v}.$$

**Доказательство.** Имеем:

$$\vec{u}_* \vec{v} = v^\alpha \partial_\alpha + \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} v^\beta \partial_{n+\alpha},$$

$$(\nabla_{\vec{v}} \vec{u})^v = (v^\alpha \vec{e}_\alpha u^c + v^\alpha \Gamma_{ab}^c u^b) \partial_{n+c},$$

$$\vec{v}^h = v^\alpha \vec{e}_\alpha - v^\alpha \Gamma_{ab}^c u^b \partial_{n+c}.$$

Складывая два последних равенства, убеждаемся в справедливости предложения.

Используя равенство, полученное в предложении 4, получаем

**Предложение 5.** Для допустимого ковариантно постоянного векторного поля  $\vec{u} \in \Gamma(D)$  имеет место следующее равенство:

$$\vec{u}_* D = HD.$$

**Теорема.** Пусть  $\vec{u} \in \Gamma(D)$  – допустимое ковариантно постоянное векторное поле и. Если производная Ли от метрического тензора  $g$  равна нулю –  $\partial_n g = 0$ , то подмногообразии  $\vec{u}(M) \subset D$  является вполне геодезическим подмногообразием.

**Доказательство.** Из разложения

$$\tilde{\nabla}_a \vec{e}_b = \tilde{\nabla}'_a \vec{e}_b + A(\vec{e}_a, \vec{e}_b),$$

где  $\tilde{\nabla}'$  – индуцированная на  $\vec{u}(M)$  связность, а  $A$  – вторая квадратичная форма, получаем

$$A(\vec{e}_a, \vec{e}_b) = \tilde{\Gamma}_{ab}^{n+c} \partial_{n+c} + \tilde{\Gamma}_{ab}^n \partial_n.$$

Таким образом, если  $\tilde{\Gamma}_{ab}^{n+c} = \tilde{\Gamma}_{ab}^n = 0$ , то подмногообразии  $\vec{u}(M) \subset D$  является вполне геодезическим подмногообразием.

Учитывая предложение 3, убеждаемся в справедливости теоремы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Букушева А.В. Изометрические преобразования продолженных почти контактных метрических структур с метрикой полного лифта // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2016. №47. С. 39-47.
2. Букушева А.В. Нелинейные связности и внутренние полупульверизации на распределении почти контактной метрической структуры // Математика. Механика. 2015. №17. С. 6-8.

3. Букушева А.В. Продолжение римановой метрики в расслоение допустимых 2-форм субриманова многообразия // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Ярославль, 2017. С. 29-33.
4. Букушева А.В. Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий / А.В. Букушева, С.В. Галаев // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2017. №48. С.32-41.
5. Букушева А.В. Поднятие подмногообразия в распределение субриманова многообразия // Novainfo.Ru. 2018. Т. 1, №93. С. 1-6.
6. Галаев С.В. Гладкие распределения с допустимой гиперкомплексной псевдоэрмитовой структурой // Вестник Башкирского ун-та. 2016. Т. 21, №3. С. 551-555.
7. Галаев С.В. Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Изв. Саратов. ун-та. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, №3. С. 263-272.
8. Галаев С.В. Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, №3(59). С. 53-63.
9. Галаев С.В. Почти симплектические связности на неголономном многообразии / С.В. Галаев, А.В. Гохман // Математика. Механика. 2001. №3. С. 28-31.
10. Ямпольский А.Л. О вполне геодезических векторных полях на подмногообразии // Мат. физика, анализ, геометрия. 1996. Т.1, № 1-2. С. 540-545.
11. Bukusheva A.V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution / A.V. Bukusheva, S.V. Galaev // Bulletin of the Transilvania University of Brasov Series III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Т. 4, №2. С. 13-22.
12. Walczak P. On totally geodesic submanifolds of tangent bundle with Sasaki metric // Bull. Acad. Pol. Sci, ser. Sci. Math. 1989. V. 28, №3-4. P. 161-165.

УДК 514.76

**С. В. Галаев**

Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
Россия, г. Саратов, e-mail: [sgalaev@mail.ru](mailto:sgalaev@mail.ru)

## **О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ МНОГООБРАЗИЙ САСАКИ**

*Дается отрицательный ответ на вопрос о существовании двух различных эндоморфизмов распределения нулевой кривизны многообразия Сасаки, определяющих принадлежащие одному геодезическому классу римановы пространства.*

**Ключевые слова:** многообразия Сасаки,  $N$ -продолженная связность, тензор кривизны Схоутена.

S. V. Galaev

G.N. Chernyshevsky National Research Saratov State University  
Russia, Saratov, e-mail: sgalaev@mail.ru

## ON GEODESIC TRANSFORMATIONS OF ZERO CURVATURE DISTRIBUTIONS OF SASAKI MANIFOLDS

*The negative answer is given to the question of existence for two different endomorphisms of a zero curvature distribution of a Sasaki manifold giving rise the Riemannian spaces belonging to the same geodesic class.*

**Keywords:** Sasaki manifold,  $N$ -extended connection, Schouten curvature tensor.

### Введение

Первые результаты из геометрии распределений почти контактных метрических многообразий опубликованы в работах [9, 12]. Как было показано в цитируемых работах, на распределении  $D$  многообразия  $M$ , наделенного почти контактной метрической структурой  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ , естественным образом задается структура нового почти контактного метрического многообразия. Эта структура получила название продолженной структуры. Для задания продолженной структуры используется эндоморфизм  $N: TM \rightarrow TM$  такой, что для всех  $x \in M: N(D_x) \subset D_x$ ,  $N\vec{\xi} = 0$ . Наличие условия  $N\vec{\xi} = 0$  указывает на то, что эндоморфизм  $N$  является допустимым эндоморфизмом [1, 2], поэтому, в дальнейшем, мы будем писать  $N: D \rightarrow D$ . С геометрической точки зрения задание эндоморфизма  $N$  позволяет продолжить внутреннюю связность до связности в векторном расслоении  $(D, \pi, M)$ , где  $\pi: D \rightarrow M$  – естественная проекция. Идея использования эндоморфизма для построения связности в векторном расслоении  $(D, \pi, M)$  принадлежит Вагнеру [6]. Используемый Вагнером подход был обобщен автором настоящей статьи в работах [9, 12].

Пусть  $N_1, N_2$  – эндоморфизмы, определяющие два продолженных римановых многообразия с метрическими тензорами  $G_1, G_2$  соответственно. В работе доказывается, что продолженные римановы пространства принадлежат разным геодезическим классам, если  $N_1 \neq N_2$ .

### $N$ -продолженная связность на многообразии Сасаки

Пусть на гладком многообразии  $M$  нечетной размерности  $n=2m+1$  задана контактная метрическая структура  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$  [3-5], где  $\varphi$  – структурный эндоморфизм,  $\vec{\xi}$  и  $\eta$  – вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой,  $g$  – (псевдо) риманова метрика. Тензорное поле  $\Omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \varphi\vec{y})$  называется фундамен-

тальной формой структуры. Для контактной метрической структуры выполняется равенство  $\Omega = \omega = d\eta$ . Пусть  $D$  – гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой  $\eta$ ,  $D^\perp = \text{Span}(\vec{\xi})$  – его оснащение:  $TM = D \oplus D^\perp$ . Однозначно определяемое условиями  $\eta(\vec{\xi}) = 1$ ,  $\ker \omega = \text{Span}(\vec{\xi})$  векторное поле  $\vec{\xi}$  называется полем Риба. Назовем  $D$  распределением контактной метрической структуры. Многообразие Сасаки – нормальное контактное метрическое многообразие. Для многообразия Сасаки выполняется условие  $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$ , где  $N_\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = [\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}] + \varphi^2[\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\varphi\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\vec{x}, \varphi\vec{y}]$  – тензор Нейенхейса эндоморфизма  $\varphi$ .

Для проведения необходимых вычислений будем использовать атлас карт  $k(x^\alpha)$  ( $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$ ;  $a, b, c = 1, \dots, n-1$ ) таких, что  $\partial_n = \vec{\xi}$  [5, 7, 8]. Введем оператор проектирования  $P: TM \rightarrow D$ , определяемый разложением  $TM = D \oplus D^\perp$ . Векторные поля  $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$  линейно независимы в каждой точке, порождая систему  $D: D = \text{Span}(\vec{e}_a)$ . Легко проверить, что  $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n$ .

Рассмотрим допустимые тензорные поля следующего вида:  $h\vec{x} = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}\varphi)(\vec{x})$ ,  $C(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}g)(\vec{x}, \vec{y})$ ,  $g(C\vec{x}, \vec{y}) = C(\vec{x}, \vec{y})$ ,  $L\vec{x} = C\vec{x} - \varphi\vec{x}$ ,  $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(TM)$ . В адаптированных координатах имеем:

$$h_b^a = \frac{1}{2}\partial_n \varphi_b^a, \quad C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab}, \quad C_b^a = g^{da}C_{db}, \quad \varphi_c^a = g^{bc}\omega_{ba}.$$

Обозначим коэффициенты связности Леви-Чивита тензора  $g$  с помощью символов  $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$ .

**Предложение 1.** Коэффициенты связности Леви-Чивита контактного метрического многообразия в адаптированных координатах принимают вид:

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c, \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab}, \quad \tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = C_a^b - \varphi_a^b, \quad \tilde{\Gamma}_{n\alpha}^n = \tilde{\Gamma}_{nn}^\alpha = 0,$$

где  $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_{bc})$ .

Под внутренней линейной связностью на многообразии с контактной метрической структурой [10, 11] понимается отображение

$$\nabla: \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D),$$

такое, что:

- 1)  $\nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}}$ ,
- 2)  $\nabla_{\vec{x}}f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}$ ,
- 3)  $\nabla_{\vec{x}}(\vec{y} + \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z}$ ,

где  $\Gamma(D)$  – модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности задаются соотношениями  $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c\vec{e}_c$ . Формулы преобразования для коэффициентов связности имеют обычный вид:

$$\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'} A_b^{b'} A_c^c \Gamma_{a'b'}^{c'} + A_c^c \vec{e}_a A_b^{c'}$$

Кручение внутренней линейной связности  $S$  задается равенством

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}} \vec{y} - \nabla_{\vec{y}} \vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}].$$

Или, в адаптированных координатах, –

$$S_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c.$$

Говорят, что над распределением  $D$  задана связность, если распределение  $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$ , где  $\pi: D \rightarrow M$  – естественная проекция, раскладывается в прямую сумму вида  $\tilde{D} = HD \oplus VD$ , где  $VD$  – вертикальное распределение на тотальном пространстве  $D$ .

Гладкая структура на распределении  $D$  задается следующим образом. Каждой адаптированной карте  $k(x^\alpha)$  многообразия  $M$  ставится в соответствие свертка  $\tilde{k}(x^\alpha, x^{n+a})$  на многообразии  $D$ , где  $x^{n+a}$  – координаты допустимого вектора в базисе  $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ . Задание связности над распределением сводится к заданию объекта  $G_b^a(x^\alpha, x^{n+a})$  такого, что  $HD = \text{Span}(\vec{e}_a)$ , где  $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$ .

Если  $\nabla$  – внутренняя линейная связность, определяемая горизонтальным распределением  $HD$ , и  $N: D \rightarrow D$  – поле допустимого тензора типа  $(1,1)$ , то  $N$ -продолженной связностью назовем связность в векторном расслоении  $(D, \pi, M)$ , определяемую разложением  $TD = \tilde{HD} \oplus VD$ , такую, что  $\tilde{HD} = HD \oplus \text{Span}(\vec{u})$ , где  $\vec{u}_{\vec{x}} = \vec{e} - (N\vec{x})^v$ ,  $\vec{e} = \partial_n$ ,  $\vec{x} \in D$ ,  $(N\vec{x})^v$  – вертикальный лифт. В базисе  $(\vec{e}_a, \partial_n, \partial_{n+a})$  поле  $\vec{u}$  получает следующее координатное представление:  $\vec{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}$ .

Допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{y}} \vec{z} - \nabla_{\vec{y}} \nabla_{\vec{x}} \vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}],$$

где  $Q = 1 - P$ , названо Вагнером [1] тензором кривизны Схоутена. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид

$$R_{abc}^d = 2\vec{e}_{[a} \Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a||e||}^d \Gamma_{b]c}^e.$$

Назовем тензор Схоутена тензором кривизны распределения  $D$ , а распределение  $D$ , в случае обращения в нуль тензора Схоутена, – распределением нулевой кривизны. Частные производные  $\partial_n \Gamma_{bc}^a = P_{bc}^a$  являются компонентами допустимого тензорного поля, обозначаемого в дальнейшем  $P(\vec{x}, \vec{y})$ .

Векторные поля

$$(\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}, \partial_{n+a})$$

задают на  $D$  адаптированное поле базисов, а формы

$(dx^a, \Theta^n = dx^a + \Gamma_a^n dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b + N_b^a x^{n+b} dx^n)$  – сопряженное поле кобазисов. Имеют место следующие структурные уравнения:

$$\begin{aligned} [\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] &= 2\omega_{ba}\vec{u} + x^{n+d}(2\omega_{ba}N_d^c + R_{bad}^c)\partial_{n+c}, \\ [\vec{\varepsilon}_a, \vec{u}] &= x^{n+d}(\partial_n\Gamma_{ad}^c - \nabla_a N_d^c)\partial_{n+c}, \\ [\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] &= \Gamma_{ab}^c\partial_{n+c}, \\ [\vec{u}, \partial_{n+a}] &= N_a^c\partial_{n+c}. \end{aligned}$$

Определим на многообразии  $D$  почти контактную метрическую структуру  $(D, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$ , полагая  $J\vec{x}^h = \vec{x}^v, J\vec{x}^v = -\vec{x}^h$ .  $\tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^h) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{y}^v) = g(\vec{x}, \vec{y})$ ,  $\tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^v) = \tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{u}) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{u}) = 0$ .

**Предложение 2.** Пусть  $M$  – многообразии Сасаки с нулевым тензором кривизны Схоутена, тогда для коэффициентов  $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$  связности Леви-Чивита метрики  $\tilde{g}$  выполняются равенства:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ab}^c &= \Gamma_{ab}^c, \\ 2\tilde{\Gamma}_{ab}^{n+c} &= 2\omega_{ba}N_0^c, \\ 2\tilde{\Gamma}_{a,n+b}^c &= -\varphi_a^c N_0^e g_{eb}, \\ \tilde{\Gamma}_{a,n+b}^{n+c} &= \Gamma_{ab}^c, \\ 2\tilde{\Gamma}_{n+a,b}^c &= 2g^{cd}\omega_{bd}N_0^e g_{ea}, \\ \tilde{\Gamma}_{na}^c &= -\varphi_a^c, \\ 2\tilde{\Gamma}_{na}^{n+c} &= g^{cd}\nabla_a N_0^e, \\ 2\tilde{\Gamma}_{n,n+a}^c &= -g^{cd}(\nabla_d N_0^e)g_{ae}, \\ \tilde{\Gamma}_{ab}^n &= \omega_{ba}, \\ 2\tilde{\Gamma}_{a,n+b}^n &= (\nabla_a N_0^e)g_{be}, \\ \tilde{\Gamma}_{n+a,n}^{n+c} &= g^{cd}\nabla_n^N g_{ad}. \end{aligned}$$

**Теорема.** Пусть  $M$  – многообразии Сасаки с нулевым тензором кривизны Схоутена и  $(D, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, G_1, \tilde{D})$ ,  $(D, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, G_2, \tilde{D})$  –  $N$ -продолженные структуры. Тогда если  $N_1 \neq N_2$ , то  $N$ -продолженные структуры принадлежат разным геодезическим классам.

**Доказательство.** От противного, пусть  $(D, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, G_1, \tilde{D})$ ,  $(D, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, G_2, \tilde{D})$  принадлежат одному геодезическому классу. Покажем, что в этом случае  $N_1 = N_2$ . Найдем компоненты  $\psi_i$  1-формы, связывающей коэффициенты соответствующих структур. Из предложения 1 непосредственно следует, что  $\psi_a = 0$ . Далее, имеем  $\varphi_a^c N_{2_0}^e g_{eb} - \varphi_a^c N_{1_0}^e g_{eb} = \psi_{n+b} \delta_a^c$ . Свернем обе части последнего равенства



по индексам  $c, a$ . В результате получаем  $0 = 2m\psi_{n+b}$ . Отсюда следует, что  $0 = \psi_{n+b}$ . Возвращаясь вновь к равенствам  $\varphi_a^c N_{2_0}^e g_{eb} - \varphi_a^c N_{1_0}^e g_{eb} = \psi_{n+b} \delta_a^c$ , убеждаемся в том, что  $N_1 = N_2$ , что и доказывает теорему.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Букушева А.В. Изометрические преобразования продолженных почти контактных метрических структур с метрикой полного лифта // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2016. №47. С. 39–47.
2. Букушева А.В. Инфинитезимальные автоморфизмы распределений контактных метрических многообразий с допустимой симплектической структурой // Математика. Механика. 2016. Т. 18. С. 11–13.
3. Букушева А.В. Нелинейные связности и внутренние полупульверизации на распределении почти контактной метрической структуры // Математика. Механика. 2015. №17. С. 6–8.
4. Букушева А.В. Продолжение римановой метрики в расслоение допустимых 2-форм субриманова многообразия // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Ярославль. 2017. С. 29–33.
5. Букушева А.В. Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий / А.В. Букушева, С.В. Галаев // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2017. №48. С. 32–41.
6. Вагнер В.В. Геометрия  $(n-1)$ -мерного неголомомного многообразия в  $n$ -мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.
7. Галаев С.В. Гладкие распределения с допустимой гиперкомплексной псевдоэрмитовой структурой // Вест. Башкир. ун-та. 2016. Т. 21, №3. С. 551–555.
8. Галаев С.В. Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакских многообразий // Изв. Саратов. ун-та. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16. №3. С. 263–272.
9. Галаев С.В. Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17. №3(59). С. 53–63.
10. Галаев С.В. Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий // Изв. Саратов. ун-та. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17. №2. С. 138–147.
11. Галаев С.В. Почти симплектические связности на неголомомном многообразии / С.В. Галаев, А.В. Гохман // Математика. Механика. 2001. №3. С. 28–31.
12. Bukusheva A.V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution / A.V. Bukusheva, S.V. Galaev // Bulletin of the Transilvania University of Braşov. Series III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Т. 4. № 2. С. 13–22.

УДК 512.7:514.14

Л. Б. Медведева<sup>1</sup>, Л. А. Сидорова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны,

<sup>2</sup>Ярославский государственный технический университет

Россия, г. Ярославль, e-mail: lbmedvedeva@yandex.ru,

sidorovala@ystu.ru

## ОБ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ МОДЕЛИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

*Построена плоская модель четырехмерного проективного пространства. Для построения модели используется алгебраическое многообразие прямых, пересекающихся в  $P^4$  три двумерные плоскости общего положения.*

**Ключевые слова:** проективное пространство, подпространство, плоская модель, отображение гиперсетью, образы точек, прямых, плоскостей.

L. B. Medvedeva<sup>1</sup>, L. A. Sidorova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Yaroslavl higher military school of air defense,

<sup>2</sup>Yaroslavl State Technical University

Russia, Yaroslavl, e-mail: lbmedvedeva@yandex.ru,

sidorovala@ystu.ru

## ON A PLANE MODEL ON THE FOUR-DIMENSIONAL PROJECTIVE SPACE

*A plane model for 4-dimensional projective space is constructed by means of an algebraic variety of secant lines for three general 2-dimensional planes in  $P^4$ .*

**Keywords:** projective space, subspace, plane model, mapping by a hypernet, images of points, lines, planes.

### Введение

Рассмотрим в проективном пространстве  $P^4$  множество  $M$  прямых, пересекающихся в нем три двумерные плоскости  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) общего положения: любые две из них имеют общую точку  $\alpha_i \cap \alpha_j = A_j$  ( $i \neq j$ ).

Нетрудно доказать, что через каждую точку  $X \in P^4$ ,  $X \notin \alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) проходит единственная прямая данного множества, а в каждой гиперплоскости прямые данного множества образуют одну серию образующих неко-

торой квадрики – линейчатой поверхности второго порядка без особых точек.

В работе [1, с. 139] множество  $M$  называется *гиперсетью* первого порядка, второго класса. Порядок – это число прямых гиперсети, проходящих через точку общего положения, класс – порядок (степень) линейчатой поверхности из прямых гиперсети, лежащих в гиперплоскости общего положения. К характеристикам гиперсети также относятся особые точки и особые гиперплоскости. Особыми точками данной гиперсети являются точки плоскостей  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и плоскости  $\alpha_4$ , проходящей через три точки  $A_{12}, A_{13}, A_{23}$ . Особыми гиперплоскостями являются гиперплоскости, проходящие через каждую из плоскостей  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ).

В данной статье гиперсеть  $M$  прямых используется для построения плоской модели пространства  $\mathbb{R}^4$ .

За плоскость проекций (плоскость изображений) возьмем плоскость  $\pi$ , для которой никакие три из четырех точек  $A_i = \alpha_i \cap \pi$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , не лежат на одной прямой.

Задание плоскостей  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  и  $\pi$  фиксирует в  $\mathbb{R}^4$  множество прямых, пересекающих эти плоскости. Эти прямые заматают гиперкубику  $F_3^3$  – трехмерную линейчатую поверхность третьего порядка, описание свойств которой можно найти в [2, с.193-204].

Совокупность плоскостей  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \pi$  и определяемую ими гиперповерхность назовем *аппаратом проектирования*. В дальнейшем образы подпространств  $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^4$  на плоскости  $\pi$  будем обозначать символом  $f(\mathbb{R}^k)$ .

Заметим, что прямые гиперсети  $M$ , пересекающие  $\pi$ , проходят только через точки  $z \in F_3^3$ , вследствие чего отобразить на  $\pi$  каждую точку пространства  $\mathbb{R}^4$  нельзя. Поэтому основным элементом пространства  $\mathbb{R}^4$  при отображении следует считать гиперплоскость, а линейные подпространства  $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^4$  ( $k = 0, 1, 2$ ) рассматривать как пересечение гиперплоскостей, то есть как линейные многообразия гиперплоскостей соответствующих размерностей.

В статье сначала получено изображение гиперплоскости, а в дальнейшем – всех подпространств  $\mathbb{R}^k$  пространства  $\mathbb{R}^4$  меньшей размерности.

### 1. Изображение на $\pi$ гиперплоскости

Множество прямых  $b \in M$ , принадлежащих неособой гиперплоскости  $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ , составляют прямые, пересекающие три прямые  $p_i = \mathbb{R}^3 \cap \alpha_i$

( $i = 1, 2, 3$ ). Как известно, такое множество прямых лежит на квадрике  $F_2^2 \subset P^3$ . Двумерная квадратика  $F_2^2$  пересекает в  $P^4$  двумерную плоскость  $\pi$  в двух точках:  $F_2^2 \cap \pi = \{B_1, B_2\}$ , а  $P^3 \cap \pi = p$ , причем  $B_1, B_2 \in p$ . Через точки  $B_1$  и  $B_2$  проходят образующие  $b_1$  и  $b_2$  поверхности  $F_2^2$ , которые являются общими секущими прямых  $p_i = P^3 \cap \alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и  $p = P^3 \cap \pi$ .

Не исключается случай, когда  $B_1 = B_2 \in p$ . Тогда  $b_1 = b_2$ , а прямая  $p = P^3 \cap \pi$  является касательной к  $F_2^2 \subset P^3$ .

Таким образом, каждой гиперплоскости  $P^3$  общего положения относительно аппарата проектирования можно поставить в соответствие в плоскости  $\pi$  пару точек или пунктированную прямую – прямую с фиксированной на ней точкой.

Возникает вопрос: можно ли восстановить в  $P^4$  гиперплоскость, если задать в плоскости изображений пару точек или пунктированную прямую?

Пусть в  $\pi$  фиксированы две точки  $B_1$  и  $B_2$  ( $B_i \neq A_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ). Через каждую из них проходит единственная прямая гиперсети (в силу ее свойств); эти две прямые не лежат в одной плоскости, следовательно, определяют единственную гиперплоскость.

Пусть теперь в плоскости  $\pi$  фиксирована прямая  $p$ ,  $A_j \notin p$ , с точкой  $B \in p$ ,  $B \neq A_j$ . Тогда прямая  $b \in M$ , проходящая через точку  $B$ , и пересекающая ее прямая  $p$  определяют плоскость, через которую проходит одномерное семейство гиперплоскостей. Можно доказать, что среди них существует единственная гиперплоскость, содержащая квадратичку  $F_2^2 \subset M$ , касающуюся прямой  $p$  и проходящую через  $b \in M$ .

Итак, доказано, что *изображением гиперплоскостей общего положения относительно аппарата проектирования на плоскости  $\pi$  служат пары точек или пунктированные прямые:  $f(P^3) = \{P_1, P_2\}$ .*

Найдем на плоскости  $\pi$  изображение особых гиперплоскостей гиперсети.

Особыми гиперплоскостями гиперсети  $M$  являются гиперплоскости пучков с вершинами  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Пусть  $\alpha_1 \subset P^3$ . Тогда  $P^3 \cap \pi = p$ , причем  $p \ni A_1$ . Таким образом,  $P^3$  отображается в прямую  $p \ni A_1$ . Обратно, всякая  $p \ni A_1$ , лежащая в плоскости

изображений  $\pi$ , определяет единственную гиперплоскость  $P^3 \subset P^4$  – гиперплоскость, которая проходит через  $\alpha_1$  и прямую  $p \in A_1$ . Заметим также, что множество прямых гиперсети, пересекающих прямые  $P^3 \cap \alpha_j = a_j$ ,  $A_j \in a_j$  ( $j = 2, 3$ ) и прямую  $p$  образуют квадрику, которая пересекает плоскость  $\alpha_1$  по конике.

Аналогичные рассуждения относительно гиперплоскостей пучков с вершинами  $\alpha_j$  ( $j = 2, 3, 4$ ) позволяют сделать следующий вывод.

*Гиперплоскости пучков с вершинами  $\alpha_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) изображаются на  $\pi$  прямыми пучков с вершинами  $A_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ).*

Пусть теперь  $P^3 \supset \pi$ . В этом случае  $F_2^2 \subset P^3$  и пересекает  $\pi$  по кривой  $k^2$  второго порядка. Можно доказать, что коника  $k^2$  содержит точки  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Обратно, всякая коника из пучка с базисными точками  $A_i$  определяет в  $P^4$  единственную гиперплоскость.

Действительно, коника из пучка задается произвольной точкой  $X \in \pi$ . Пусть точка  $X \in \pi$  фиксирована. Тогда прямая  $x \in M$ , проходящая через точку  $X$ , и плоскость изображений  $\pi$  определяют единственную гиперплоскость.

Прямые гиперсети, принадлежащие этой гиперплоскости, пересекают прямые  $A_i X_i$ , где  $X_i = x \cap \alpha_i$  и, следовательно, замечают квадрику, пересечение которой с плоскостью  $\pi$  совпадает с коникой, определяемой точкой  $X$  и точками  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). След этой полуквадрики в  $\pi$  совпадает с коникой из пучка с базисными точками  $A_i$ , определяемой точкой  $X$ .

Итак, гиперплоскостям  $P^3 \supset \pi$  соответствуют на  $\pi$  коники  $k^2$  из пучка с базисными точками  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

## **2. Изображение плоскости $P^2 \subset P^4$**

Всякая плоскость  $P^2$  может рассматриваться как пересечение двух гиперплоскостей, а множество всех гиперплоскостей, проходящих через  $P^2$ , есть пучок (одномерное многообразие).

Пусть  $P^2 = P_1^3 \cap P_2^3$  и  $f(P_1^3) = \{P_1, P_2\}$ ,  $f(P_2^3) = \{Q_1, Q_2\}$ . Предположим, что  $P^2$  имеет общее расположение относительно  $F_3^3$ :  $F_3^3 \cap P^2 = C^3$  ( $C^3$  – кривая 3-го порядка). Прямые гиперсети, пересекающие  $P^2$ , образуют

гиперкубику  $V_3^3$  четвертого класса ([2], с.193-204).  $V_3^3 \cap \pi = k^3$ ,  $k^3$  – кривая третьей степени.

Нетрудно показать, что  $A_i \in k^3$ , ( $1 \leq i \leq 4$ ). Действительно, через точку  $A_1 = \pi \cap \alpha_1$  проходит единственная прямая  $a_1$ , пересекающая  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $P^2$ , следовательно,  $a_1 \in V_3^3$ , а значит, и  $A_1 \in V_3^3$ . Но, так как  $A_1 = \pi \cap \alpha_1$ , то  $A_1 \in \pi \cap V_3^3 = k^3$ . Аналогично доказывается, что  $A_2, A_3 \in k^3$ . Рассмотрим теперь точку  $A_4 = \alpha_4 \cap \pi$  и точку  $R = P^2 \cap \alpha_4$ . Прямая  $A_4R$  лежит в  $\alpha_4$ , а значит, пересекает каждую из плоскостей  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Поэтому  $A_4R \subset V_3^3$ , а значит,  $A_4 \in k^3$ .

Докажем теперь, что  $\{P_1, P_2, Q_1, Q_2\} \subset k^3$ . Рассмотрим точки  $P_i$  ( $i = 1, 2$ ). Через каждую из них проходит по одной прямой  $p_1 \ni P_1$  и  $p_2 \ni P_2$  гиперсети. Так как  $p_1, p_2$  лежат в  $P^3$ , то  $p_1, p_2$  пересекают  $P^2$  и  $p_1, p_2 \subset V_3^3$ . Отсюда следует, что точки  $P_1, P_2 \in k^3$ . Аналогично,  $Q_1, Q_2 \in k^3$ .

Далее,  $P^2 \cap \pi = P$ ,  $P$  – след  $P^2$  в  $\pi$ . Так как  $P^2 \subset P_1^3$  и  $P^2 \subset P_2^3$ , то  $P = P_1P_2 \cap Q_1Q_2 \in k^3$ .

Итак, задание в  $\pi$  плоскости  $P^2$  двумя парами точек приводит к построению на плоскости  $\pi$  кривой  $k^3$  третьего порядка, однозначно определяемой девятью точками:  $A_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ),  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  и  $P = P_1P_2 \cap Q_1Q_2$ . Следует заметить, что точка  $P \in k^3$  играет особую роль на кривой: определяя вместе с точками  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  кривую  $k^3$ , содержащую точки  $A_j$  ( $1 \leq j \leq 4$ ) она фиксирует единственную плоскость из одномерного семейства плоскостей, следы которых принадлежат  $k^3$ . Если гиперплоскость  $R^3$  содержит плоскость  $P^2 = P_1^3 \cap P_2^3$ , то прямая  $R_1R_2$ , где  $\{R_1, R_2\} = f(R^3)$  на плоскости  $\pi$  проходит через точку  $P$ .

По определению, множество пар точек  $\{T_1, T_2\} \subset k^3$ , высекаемых на плоской кривой  $k^3$  прямыми пучка с центром  $P \in k^3$ , называется линейным рядом  $g_1^2 \subset k^3$ . Таким образом, изображением на плоскости многообразия гиперплоскостей некоторого пучка с вершиной  $P^2$  служит линейный ряд  $g_1^2 \subset k^3$ . Изображением плоскости  $P^2$  можно считать кривую  $k^3$  с выделенной на ней точкой.

Далее рассмотрены специальные случаи расположения плоскости  $P^2$  относительно аппарата проектирования. Получены следующие результаты относительно изображения таких плоскостей на плоскости  $\pi$ .

1. Пусть плоскость  $P^2$  пересекает одну из плоскостей  $\alpha_i$  ( $i=1,2,3$ ) по прямой  $a_i$ . Тогда  $P^2 = P_1^3 \cap P_2^3$ , где  $P_1^3 = \langle P^2, \alpha_i \rangle$  является линейной оболочкой плоскостей  $P^2$  и  $\alpha_i$ . Изображениями гиперплоскостей  $P_1^3$  и  $P_2^3$  служат соответственно прямая  $f(P_1^3) = p$ ,  $A_i \in p$ , и пара точек  $f(P_2^3) = \{Q_1, Q_2\}$ , определяющая вместе с точками  $A_j$  ( $j \neq i$ ) конику  $k^2$ . След  $P$  плоскости  $P^2$  в плоскости  $\pi$  лежит на прямой  $p$ , которая также содержит и точки  $\{Q_1, Q_2\}$ . Кривая  $k^3$  в этом случае распадается:  $k^3 = k^2 \cup p$ . Изображением плоскости, а вместе с ней и многообразия гиперплоскостей, через нее проходящих, служит точка  $P$  и линейный ряд  $g_1^2 \subset k^2$ , высекаемый на конике пучком прямых с вершиной  $P$ ; коника определяется точками  $A_j$  ( $j \neq i$ ) и парой точек, лежащих на прямой  $A_i P$ .

2. Если плоскость  $P^2$  пересекает две плоскости, например,  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$  ( $i \neq j$ ,  $i=1,2,3$ ), по прямым  $m_i$  и  $m_j$  соответственно, то эти прямые проходят через точку  $A_j$  ( $i \neq j$ ). В этом случае можно рассматривать  $P^2$  как пересечение следующих двух гиперплоскостей:  $P^2 = P_1^3 \cap P_2^3$ , где  $P_1^3 = \langle P^2, \alpha_i \rangle$ ,  $P_2^3 = \langle P^2, \alpha_j \rangle$ . Изображениями таких гиперплоскостей являются прямые  $f(P_1^3) = p_1$  ( $A_i \in p_1$ ) и  $f(P_2^3) = p_2$  ( $A_j \in p_2$ ), причем прямые  $p_1$  и  $p_2$  пересекаются в точке  $P = P^2 \cap \pi$ . Кривая  $k^3$  распадается на три прямые  $p_1 \cup p_2 \cup A_k A_4$ ,  $k \neq i, j$ . Изображением гиперплоскостей, проходящих через плоскость  $P^2$ , изображением которой служит пара прямых  $p_1, p_2$  из пучков с вершинами  $A_i, A_j$  соответственно, являются пары точек  $\{P, X\}$ , где  $P$  – след плоскости  $P^2$ , а  $X \in A_k A_4$ .

3. Если  $P^2$  проходит через прямую  $l$  гиперсети, то  $P = P^2 \cap \pi = l \cap \pi$ . В этом случае точка  $P$  является особой кратности 2 на кривой  $k^3$ , и гиперплоскостям пучка с вершиной  $P^2$  соответствуют пары точек  $\{P, P_2\}$  где  $P_2 \in k^3$ .

4. Пусть теперь плоскость  $P^2$  пересекает  $\pi$  по прямой:  $P^2 \cap \pi = s$ . Тогда  $P^2$  можно рассматривать как пересечение гиперплоскости  $\langle P^2, \pi \rangle$  и

гиперплоскости  $\langle P^2, m \rangle$ , где  $m \in M$  пересекает прямую  $s$  в некоторой точке  $P$ . Гиперплоскости  $\langle P^2, \pi \rangle$  соответствует в  $\pi$  коника из пучка с базисными точками  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , которая однозначно будет определена указанием точки  $P \in s$ . Эта коника пересекает прямую  $s$  еще в одной точке. Поскольку выбор точки  $P \in s$  определяет единственную гиперплоскость  $\langle P^2, m \rangle$ , то множество гиперплоскостей, проходящих через  $P^2$ , изображается на  $\pi$  множеством пар точек  $\{P_1, P\} \subset s$ , которые высекаются на прямой  $s$  кониками пучка пучка с базисными точками  $A_i$ .

5. Пусть плоскость  $P^2$  пересекает по прямой и плоскость  $\pi$  и плоскость  $\alpha_i$ . Тогда  $P^2 \cap \alpha_i = \pi \cap \alpha_i$ . Изображением на  $\pi$  такой плоскости является пара точек  $\{A_i, S\}$ , где  $S \in s = P^2 \cap \pi$ . Задание такой плоскости осуществляется указанием точки  $S \in \pi$ , которая определяет прямую  $A_i S$  и конику  $k^2 \ni \{A_1, A_2, A_3, A_4, S\}$ .

### 3. Изображение на $\pi$ прямой

Всякая прямая  $l \subset P^4$  является вершиной двумерной связки гиперплоскостей, изображение которой на  $\pi$  и можно считать изображением прямой  $l$ .

Докажем, что пары точек, соответствующие гиперплоскостям  $P^3 \supset l$ , являются соответствующими элементами некоторого инволютивного преобразования плоскости  $\pi$ .

Для доказательства используем результаты работы [3], в которой изучаются свойства некоторого двумерного алгебраического многообразия квадрик размерности  $n - 2$  в  $P^n$ . При  $n = 4$  получим двумерное многообразие  $\Sigma$  поверхностей второго порядка в  $P^4$  (конгруэнцию квадрик), лежащих в гиперплоскостях связки с вершиной  $l \subset P^4$ .

Выделим следующие характеристики этой конгруэнции  $\Sigma$  :

1. Порядок – число квадрик конгруэнции, проходящих через точку общего положения.
2. Класс – число гиперплоскостей, в которых лежат квадрики, проходящие через прямую общего положения.
3. Индекс – число квадрик конгруэнции, лежащих в гиперплоскости.
4. Особые точки многообразия – точки пространства, через которые проходит не конечное число квадрик.



Квадрики рассматриваемого двумерного многообразия, пересекаясь с плоскостью  $\pi$ , устанавливают в этой плоскости инволютивное кремоново соответствие  $J_j$ : соответственными парами точек в этом соответствии являются пары точек пересечения квадрик с плоскостью  $\pi$ . Вследствие этого инволюцию  $J_j$ , называют ассоциированной с конгруэнцией квадрик. Фундаментальными точками этой инволюции являются точки пересечения с  $\pi$  многообразия особых точек конгруэнции.

Исследуем теперь то инволютивное преобразование плоскости  $\pi$ , которое соответствует прямой  $l \subset \mathbb{P}^4$  в нашей модели.

Пусть  $l \subset \mathbb{P}^4$  имеет общее расположение относительно аппарата проектирования  $\{\alpha_i, \pi\}$ .

Нетрудно видеть, что конгруэнция  $\Sigma$  имеет первый порядок, первый класс и индекс 1.

Согласно выводам статьи [3], многообразием особых точек полученной конгруэнции квадрик является двумерная поверхность седьмого порядка  $F_2^7$ . В нашем случае она распадается на четыре плоскости  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) и двумерную поверхность третьей степени  $F_2^3$ , состоящую из прямых гиперсети, пересекающих прямую  $l$ .

Докажем, что все точки  $X \in \alpha_1$  являются особыми. Через точку  $X$  проходит одномерное семейство прямых  $x \subset M$ . Всякая прямая  $x$  и прямая  $l$  определяют гиперплоскость  $\langle x, l \rangle$ , в которой лежит полуквадрика  $F_2^2 \subset \Sigma$  ( $F_2^2 \subset M$ ). Так как через  $X$  проходит одномерное множество прямых  $x$ , то и квадрик  $F_2^2$  проходит одномерное семейство. Аналогично, всякая точка  $X \in \alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) является особой.

Покажем теперь, что  $F_2^3$  состоит из особых точек. Напомним, что  $F_2^2$  состоит из прямых  $x \subset M$ , пересекающих  $l$ . Через любую точку  $X \in F_2^3$  проходит единственная образующая  $x \in F_2^3$ . Прямые  $l$  и  $x$  пересекаются и, следовательно, определяют плоскость, а значит, пучок гиперплоскостей. Лежащие в каждой из этих гиперплоскостей квадрика  $F_2^2$  проходит через  $x$ , а значит и через  $X \in F_2^3$ . Итак,  $X$  – особая точка для конгруэнции квадрик.

В работе [3] инволюция  $J: \pi \rightarrow \pi$ , соответствующими точками которой являются точки пересечения с  $\pi$  квадрик  $F_2^2 \subset \Sigma$ , имеют трехкрат-

ные фундаментальные точки  $\pi \cap F_2^7$ . В нашем случае такими точками являются точки  $A_i$ , ( $1 \leq i \leq 4$ ) и три точки  $\{L_1, L_2, L_3\} = F_2^3 \cap \pi$ . Инволютивное преобразование плоскости с семью трехкратными фундаментальными точками имеет восьмой порядок и называется инволюцией Гейзера [4, с. 123-125].

Итак, задание прямой  $l \subset P^4$  фиксирует в  $P^4$  поверхность  $F_2^3$  и конгруэнцию  $\Sigma$  квадрат, порождающую в  $\pi$  инволюцию  $J_8$ , причем  $J_8$  однозначно определяются точками  $\{L_1, L_2, L_3\}$ . Обратно, задание на  $\pi$  трех точек  $L_j$  ( $1 \leq j \leq 3$ ) равносильно заданию на  $\pi$  инволюции Гейзера с фундаментальной системой  $A_i, L_j$ , а в  $P^4$  – заданию  $l$ .

Таким образом, изображением прямой  $l$  на плоскости  $\pi$  можно считать тройку точек  $\{L_1, L_2, L_3\}$ , а изображением связки гиперплоскостей – инволюцию Гейзера.

Инволюция Гейзера, четыре фундаментальные точки которой известны (точки  $A_i$ ), может быть задана не оставшейся тройкой фундаментальных точек, а тремя парами соответственных точек  $\{X_1, X_2\}$ ,  $\{Y_1, Y_2\}$ ,  $\{Z_1, Z_2\}$ . Каждая пара точек в плоскости  $\pi$  фиксирует в  $P^4$  гиперплоскости  $P_1^3$ ,  $P_2^3$ ,  $P_3^3$ , которые пересекаются по прямой  $l: P_1^3 \cap P_2^3 \cap P_3^3 = l$ .

Если  $l = P_1^3 \cap P_2^3 \cap P_3^3$ , то пары  $\{X_1, X_2\}$  и  $\{Y_1, Y_2\}$  задают на  $\pi$  кривую  $k_X^3$ , проходящую через точку  $X = X_1 X_2 \cap Y_1 Y_2$ , и определяющую плоскость  $P_1^2$ . Пары точек  $\{Y_1, Y_2\}$  и  $\{Z_1, Z_2\}$  определяют кривую  $c_Y^3 \ni Y = (Y_1 Y_2) \cap (Z_1 Z_2)$  и плоскость  $P_2^2$ ;  $P_1^2 \cap P_2^2 = l$ . Кривые  $c_Y^3$  и  $k_X^3$  имеют девять общих точек, среди которых известны  $A_i, X_1, X_2$ , остальные три являются фундаментальными точками  $L_j$  ( $1 \leq j \leq 3$ ).

В таблице 1 указаны (без доказательства) образы на плоскости  $\pi$  прямых  $l \subset P^4$  специального расположения относительно аппарата проектирования. Поясним употребляемые в таблице символы:  $J_m$  – это инволюция порядка  $m$  (бирациональное преобразование плоскости при котором прямая переходит в кривую степени  $m$ ). В записи  $z^q$  символ  $z$  обозначает число фундаментальных точек, а символ  $q$  – кратность этих точек.

**Таблица 1. Образы прямых специального расположения относительно аппарата проектирования**

	Расположение прямой в $P^4$	Образ прямой на $\pi$	Образ связки гиперплоскостей с вершиной $L$
1.	$l \cap \alpha_i \neq \emptyset, (i=1,2,3)$	$\{L_1, L_2, L_3\} : A_i \in (L_j L_k)$	$J_7 : 4^3 3^2$
2.	$l \cap \alpha_i \neq \emptyset,$ $l \cap \alpha_j \neq \emptyset$	$\{L_1, L_2, L_3\} : (L_j L_k) \ni A_i,$ $(L_k L_i) \ni A_j.$	$J_6 : 2^3 4^2 1^1$
3.	$l \subset M : l \cap \alpha_i \neq \emptyset,$ $(i=1,2,3)$	$\{L_1, L_2, L_3\} : (L_1 L_2) \ni A_3$ $(L_1 L_3) \ni A_2, (L_2 L_3) \ni A_3$	$J_5 : 1^3 3^2 3^1$
4.	$l \cap \pi = L_1, l \not\subset M$	$\{L_1, L_2, L_3\} : L_1 \in l,$ $L_2, L_3 \in k^2, \{A_i\} \in k^2$	Инволюция $J_4 : 1^6 6^1$ ; 6 фундаментальных точек $A_i, L_2, L_3$ , лежат на конике $k^2$ .
5.	$l \cap \pi = L_1, l \cap \alpha_i = L$	$\{L_1, L_2, L_3\} : A_i, L_2, L_3$ лежат на конике, $L_2 \in A_1 L_1$ .	Инволюция $J_3 : 1^2 4^3$ , $L_1$ – двукратная $F$ точка и однократные $F$ точки
6.	$l \cap \alpha_i = \emptyset (i=1),$ $l \cap \alpha_j = \emptyset (j=2),$ $l \cap \pi = L_1.$	$\{L_1, L_2, L_3\} : L_1, L_2 \in k^2, L_3 \in k^3$ $k^2 \ni \{A_i\}, 1 \leq i \leq 4,$ $L_1 A_1 \ni L_2, L_1 A_2 \ni L_3$	Инволюция $J_2 : 3^1$ , $F$ точками являются $L_1, C, D$ .
7.	$l$ – прямые, принадлежащие $F_2^7 = F_2^3 \cup \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \alpha_4,$ $l \subset \alpha_i$	$k^2 \supset A_j, A_k, A_4,$ $j, k \neq i.$	Нет такого преобразования

#### 4. Изображение точки

Решая на плоскости изображений задачи на взаимное расположение прямых, плоскостей и гиперплоскостей, можно получить образ точки  $X$  общего расположения на плоскости проекций. Изображением связки гиперплоскостей с вершиной в точке является пучок инволюций Гейзера с общим фундаментальными точками  $A_i (1 \leq i \leq 4)$  и цикл ряда  $g_1^3$  на некоторой пунктированной кривой третьей степени.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пеклич В.А. Высшая начертальная геометрия, М.: Изд-во АСВ, 2000. 344 с.
2. Bertini E. Einführung in die projective Geometrie mehrdimensionaler Raume. Wien, 1924.

3. *Котий О.А.* Алгебраические конгруэнции  $n-2$  квадратик в  $n$ -мерном проективном пространстве  $\mathbb{P}^n$  // Ученые записки ЯГПИ. Вып. 57. Геометрия. Ярославль, 1967. С. 77–84.
4. *Hudson H.P.* Cremona transformations in plane and space. Cambridge, 1927.

УДК 532.5.031

**А. А. Очиров, Д. Ф. Белоношко**

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
Россия, г. Ярославль, e-mail: otchirov@mail.ru, belonozhko@mail.ru

### **О ВЛИЯНИИ ПОВЕРХНОСТНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА И СКОРОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКИХ СРЕД НА ДРЕЙФ СТОКСА**

*Рассчитывается скорость дрейфа Стокса в двухслойной системе жидкостей, связанная с распространением волнового пакета Стокса вдоль границы раздела сред, испытывающих тангенциальный разрыв скоростей. Дополнительно рассматривается влияние поверхностного электрического заряда на скорость дрейфового движения.*

**Ключевые слова:** тангенциальный разрыв скоростей, дрейф Стокса, волновой пакет Стокса, поверхностный электрический заряд.

**A. A. Ochirov, D. F. Belonozhko**

P.G. Demidov Yaroslavl State University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: otchirov@mail.ru, belonozhko@mail.ru

### **ON THE INFLUENCE OF SURFACE CHARGE AND THE RELATIVE VELOCITY VALUE ON THE STOKES DRIFT**

*In the two-layer liquid system velocity of the Stokes drift initiated by the Stokes wave packet is computed. There is surface electric charge on the interface and the media are involved in relative movement.*

**Keywords:** tangential velocity discontinuity, Stokes drift, Stokes wave packet, surface charge.

В середине XIX века Дж. Г. Стокс показал, что периодическое волновое движение вдоль свободной поверхности идеальной жидкости вызывает не только циклические движения индивидуальных жидких частиц, но и медленное дрейфовое смещение в направлении распространения волны [1]. Скорость этого дрейфа  $U_{DS}$  прямо пропорциональна частоте волнового движения  $\omega$ , квадрату амплитуды  $\zeta^2$  и экспоненциально затухает с глубиной  $d$  :

$$U_{DS} = \zeta^2 \omega k \exp(-2kd). \quad (1)$$

В работе [2] был предложен метод, позволяющий произвести расчет скорости дрейфа и траекторий движения индивидуальных жидких частиц в системе двух несмешивающихся идеальных жидкостей, участвующих в относительном движении. Настоящая работа является расширением методики на случай, когда вдоль границы раздела распространяется не простейшая синусоидальная волна, а волновой пакет Стокса. Сама граница раздела при этом является электрически заряженной.

Рассмотрим систему двух несжимаемых несмешивающихся полубесконечных идеальных жидкостей в прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$ , в которой ось  $Oz$  направлена вертикально вверх против направления поля сил тяжести  $\mathbf{g}$ , а плоскость  $Oxy$  определяет равновесную границу раздела. Верхняя жидкость с плотностью  $\rho'$  считается менее плотной и диэлектрической, чем нижняя с плотностью  $\rho$ , которую будем считать идеальным проводником. Пусть вдоль равномерно заряженной с плотностью электрического заряда  $\kappa_0$  границы раздела распространяется простейший волновой пакет Стокса, состоящий из двух капиллярно-гравитационных волн с одинаковой амплитудой  $\zeta$  и волновыми числами  $k_+ = k + \Delta k$  и  $k_- = k - \Delta k$ , отличающимися на небольшую величину  $\Delta k = k$ . Нижнюю жидкость будем считать покоящейся, а верхнюю – движущейся поступательно с постоянной скоростью  $U_0$ . Капиллярные свойства границы раздела характеризуются коэффициентом поверхностного натяжения  $\gamma$ . Для простоты вычислений можно считать, что движение не зависит от горизонтальной координаты  $y$ . Математическая формулировка задачи для определения гидродинамических потенциалов нижней  $\varphi$  и верхней  $\varphi'$  жидкостей и электрического потенциала  $\Phi$  в этом случае запишется в виде:

$$z > \xi: \quad P' = p_0 - \rho' gz - \rho' \partial_i \varphi - \frac{\rho'}{2} \left( (\partial_x \varphi' + U_0)^2 + (\partial_z \varphi')^2 \right); \quad (2)$$

$$\Delta \varphi' = 0; \quad \nabla^2 \Phi = 0; \quad (3)$$

$$z = \xi: \quad \partial_i \xi + \partial_x \varphi \partial_x \xi = \partial_z \varphi; \quad \partial_i \xi + (\partial_x \varphi' + U_0) \partial_x \xi = \partial_z \varphi'; \quad (4)$$

$$\Phi = 0 \quad P - P' + \frac{(\nabla \Phi)^2}{8\pi} = -\frac{\gamma \partial_{xx} \xi}{(1 + \partial_x \xi^2)^{3/2}}; \quad (5)$$

$$z < \xi: \Delta\varphi = 0; \quad P = p_0 - \rho gz - \rho \partial_t \varphi - \frac{\rho}{2} \left( (\partial_x \varphi)^2 + (\partial_z \varphi)^2 \right); \quad (6)$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \nabla\Phi \rightarrow 0, \quad \nabla\varphi' \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty: \quad \nabla\varphi \rightarrow 0. \quad (7)$$

Здесь  $P$  и  $P'$  – давление в нижней и верхней жидкостях соответственно;  $p_0$  – постоянная добавка к давлению, играющая роль атмосферного давления, а функция  $\xi = \xi(x, t)$  описывает форму отклонения границы раздела от равновесного положения  $z = 0$ .

В результате решения задачи были получены аналитические выражения для описания скорости дрейфа Стокса. Простого аналитического выражения для описания траекторий движения индивидуальных жидких частиц найти не удастся, однако при необходимости можно получить эти выражения, используя численные методы. Скорость дрейфового движения оказывается зависящей от времени. Эту зависимость можно наблюдать в эксперименте, если время наблюдения будет сравнимо с периодом несущей волнового пакета. Если время наблюдения значительно превышает период огибающей волнового пакета, то имеет смысл говорить об усредненной скорости дрейфа. В этом случае исследователь должен заметить уменьшение значения скорости примерно вдвое по сравнению со случаем, когда дрейф инициирован распространением простейшей синусоидальной волны. Анализ решения показывает, что индивидуальные жидкие частицы как верхней, так и нижней жидкостей совершают циклические движения вокруг своего положения равновесия с частотой несколько меньшей, чем частота волнового возмущения, вызвавшего это движение. Поверхностный электрический заряд оказывает нелинейное влияние на скорость дрейфового движения. Существует такое значение поверхностной плотности электрического заряда, при которой достигается максимальная скорость дрейфа. Также существует критическое значение поверхностной плотности электрического заряда, превышение которой приводит к развитию неустойчивости Тонкса-Френкеля с прекращением периодического движения и переходом в аperiodический режим и, как следствие, прекращением дрейфа.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // Transactions of the Cambridge Philosophical Society. 1847. V. 8. P. 441–455.
2. *Белоножко Д.Ф.* О массопереносе, порожденном волновым возмущением поверхности тангенциального разрыва поля скоростей / Д.Ф. Белоножко, А.А. Очиров // Журн. техн. физики. 2018. Т. 88, №. 5. С. 675–683.

УДК 517.925

**В. Ш. Ройтенберг**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

## **О БИФУРКАЦИЯХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПЛОСКОСТИ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ВРАЩЕНИЙ**

*Описаны бифуркации коразмерности один в пространстве векторных полей в единичном круге, инвариантных относительно группы вращений.*

**Ключевые слова:** векторное поле на плоскости, группа вращений, группа растяжений, инвариантность, первая степень негрубости, бифуркационное многообразие.

**V. Sh. Roitenberg**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

## **ON BIFURCATIONS OF VECTOR FIELDS ON THE PLANE THAT ARE INVARIANT UNDER ROTATIONS**

*We describe bifurcations of codimension one in the space of vector fields on the unit disc, invariant under the rotation group.*

**Keywords:** planar vector field, rotation group, invariance, first order structural instability, bifurcation manifold.

### **Введение**

Грубость двумерных динамических систем с симметрией, задаваемых векторными полями, инвариантными относительно группы преобразований, изучалась в работах [1–3]. В [1] однородные векторные поля – векторные поля, инвариантные относительно группы растяжений, рассматривались на проективной плоскости. Были получены необходимые и достаточные условия грубости относительно пространства однородных векторных полей и доказано, что грубые векторные поля образуют в этом пространстве открытое и всюду плотное множество. В [2] и [3] даны необходимые и достаточные условия грубости относительно пространства векторных полей в единичном круге, инвариантных относительно группы вращений  $SO(2)$  и, соответственно, ее конечной подгруппы, состоящей из вращений на углы кратные  $2\pi/q$ ,  $q = 2, 3, \dots$ .

В [4, с. 267–282] рассматривались некоторые локальные бифуркации векторных полей на плоскости, инвариантных относительно группы вращений на углы кратные  $2\pi/q$ ,  $q = 2, 3, \dots$ .

В настоящей работе мы рассматриваем бифуркации векторных полей в единичном круге, инвариантных относительно группы вращений  $SO(2)$ .

### 1. Формулировки результатов

Пусть  $\mathcal{X}^r(D)$  – линейное нормированное пространство векторных полей класса  $C^\infty$  с  $C^r$ -нормой ( $r \geq 3$ ) [5], заданных в единичном круге  $D := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ . Линейный оператор

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2)$$

переводит векторное поле  $X \in \mathcal{X}^r(D)$  в векторное поле  $R_\theta^{-1}XR_\theta \in \mathcal{X}^r(D)$ .

Пусть  $\mathcal{X}^r(D, SO(2))$  – линейное подпространство в  $\mathcal{X}^r(D)$ , состоящее из векторных полей, инвариантных относительно действий группы  $SO(2)$ .

Согласно [3] векторное поле  $X \in \mathcal{X}^r(D, SO(2))$  тогда и только тогда, когда оно имеет в полярных координатах  $\rho, \varphi$  вид

$$P(\rho)\partial/\partial\rho + \Phi(\rho)\partial/\partial\varphi, \tag{1}$$

где

$$P(\rho) = \rho f(\rho^2) \text{ и } \Phi(\rho) = g(\rho^2), \tag{2}$$

а  $f$  и  $g$  –  $C^\infty$ -функции на  $[-1, 1]$ .

Векторное поле  $X \in \mathcal{X}^r(D, SO(2))$  называется *грубым относительно  $\mathcal{X}^r(D, SO(2))$* , если существует его окрестность  $\mathcal{U}$  в пространстве  $\mathcal{X}^r(D, SO(2))$ , такая, что любое векторное поле  $\tilde{X} \in \mathcal{U}$  топологически эквивалентно векторному полю  $X$ .

В работе [3] доказано, что множество  $\Sigma_0^r = \Sigma_0^r(D, SO(2))$  векторных полей, грубых относительно  $\mathcal{X}^r(D, SO(2))$ , открыто и всюду плотно в  $\mathcal{X}^r(D, SO(2))$  и состоит из векторных полей, для которых в их представлении в полярных координатах функция  $P$  имеет только простые нули,  $P(1) \neq 0$ , а нули функции  $\Phi$  на  $(0, 1)$  не совпадают с нулями  $P$ . Это множество совпадает с пересечением множества векторных полей Морса–Смейла в  $D$  [5] с  $\mathcal{X}^r(D, SO(2))$ .



**Определение.** Векторное поле  $X \in \mathfrak{X}^r(D, SO(2))$  имеет первую степень негрубости (относительно  $\mathfrak{X}^r(D, SO(2))$ ), если оно негрубое и существует такая его окрестность  $\mathcal{U}$  в  $\mathfrak{X}^r(D, SO(2))$ , что любое негрубое векторное поле топологически эквивалентно векторному полю  $X$ .

Определим множества  $\Sigma_{1,k}^r$ ,  $k=1,2,3,4$ , векторных полей из  $\mathfrak{X}^r(D, SO(2))$ .

Поле  $X \in \Sigma_{1,1}^r$ , если  $P'(0) = P''(0) = 0$ ,  $P'''(0) \neq 0$ , все нули  $P(\cdot)$ , принадлежащие интервалу  $(0,1)$ , простые,  $P(1) \neq 0$ ,  $\Phi$  не имеет на  $[0,1)$  нулей, общих с  $P$ .

Поле  $X \in \Sigma_{1,2}^r$ , если  $P'(0) \neq 0$ , все нули  $P(\cdot)$ , принадлежащие  $(0,1)$ , простые, за исключением одного двукратного нуля  $\rho_0$ ,  $P(1) \neq 0$ ,  $\Phi$  не имеет на  $(0,1)$  нулей, общих с  $P$ .

Поле  $X \in \Sigma_{1,3}^r$ , если  $P'(0) \neq 0$ ,  $P(1) = 0$ ,  $P'(1) \neq 0$ , все нули  $P$ , принадлежащие  $(0,1)$ , простые,  $\Phi$  не имеет на  $(0,1]$  нулей, общих с  $P$ .

Поле  $X \in \Sigma_{1,4}^r$ , если  $P$  имеет только простые нули,  $P(1) \neq 0$ , а  $\Phi$  имеет на  $(0,1)$  единственный нуль  $\rho_0$ , общий с  $P$ .

Неблуждающее множество поля  $X \in \Sigma_{1,1}^r$  состоит из двукратного сложного фокуса в начале координат, устойчивого (неустойчивого) при  $P'''(0) < 0$  ( $> 0$ ), и конечного числа  $n \geq 0$  гиперболических циклов – окружностей  $\rho = \rho_i$ , где  $\rho_i$  – нули  $P(\cdot)$ . Поле трансверсально границе круга  $D$ .

Неблуждающее множество поля  $X \in \Sigma_{1,2}^r$  состоит из грубого фокуса в начале координат, устойчивого (неустойчивого) при  $P'(0) < 0$  ( $> 0$ ), двойного цикла – окружности  $\rho = \rho_0$  и конечного числа  $n \geq 0$  гиперболических циклов – окружностей  $\rho = \rho_i$ , где  $\rho_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) – нули  $P(\cdot)$ , отличные от  $\rho_0$ . Поле трансверсально границе круга  $D$ .

Неблуждающее множество поля  $X \in \Sigma_{1,3}^r$  состоит из грубого фокуса в начале координат, устойчивого (неустойчивого) при  $P'(0) < 0$  ( $> 0$ ), и конечного числа  $n \geq 1$  гиперболических циклов – окружностей  $\rho = \rho_i$ , где  $\rho_i$  – нули  $P(\cdot)$ , одна из которых совпадает с границей круга  $D$ .

Неблуждающее множество поля  $X \in \Sigma_{1,4}^r$  состоит из грубого фокуса в начале координат, устойчивого (неустойчивого) при  $P'(0) < 0$  ( $> 0$ ),

конечного числа  $n \geq 0$  гиперболических циклов – окружностей  $\rho = \rho_i$ , где  $\rho_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) – нули  $P(\cdot)$ , окружности  $\Gamma_0: \rho = \rho_0$ , состоящей из особых точек, к каждой из которых при  $P'(\rho_0) < 0$  ( $> 0$ )  $\omega$ -предельны ( $\alpha$ -предельны) ровно две траектории, образующие вместе с особой точкой  $C^\infty$ -гладкую кривую (рис. 1б). Поле трансверсально границе круга  $D$ .

Обозначим  $\Sigma_1^r(D, SO(2)) := \Sigma_1^r := \bigcup_{k=1}^4 \Sigma_{1,k}^r$ .

**Теорема. 1.** Множества  $\Sigma_{1,k}^r$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) открыты, а множество  $\Sigma_1^r$  открыто и всюду плотно в  $\mathfrak{X}^r(D, SO(2)) \setminus \Sigma_0^r$ .

2. Для любого векторного поля  $X_0 \in \Sigma_{1,k}^r$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) существуют такие его окрестность  $V(X_0)$  в  $\mathfrak{X}^r(D, SO(2))$  и невырожденный  $C^\infty$ -функционал  $F: V(X_0) \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $X \in \Sigma_{1,k}^r$ , если  $F(X) = 0$ , и  $X \in \Sigma_0^r$ , если  $F(X) \neq 0$ .

3. Векторное поле  $X \in \mathfrak{X}^r(D, SO(2))$  имеет первую степень негрубости тогда и только тогда, когда оно принадлежит  $\Sigma_1^r$ .

Доказательство приведено в разделах 2 – 4.

Явный вид функционалов  $F$  и бифуркации  $X$  при переходе поля  $X$  из области с  $F(X) < 0$  в область с  $F(X) > 0$  указаны в п. 3.

Отметим, что векторные поля  $X \in \Sigma_{1,k}^r$ , при  $k = 1, 2$  имеют первую степень негрубости и в пространстве  $\mathfrak{X}^r(D)$  [6], а векторные поля  $X \in \Sigma_{1,4}^r$  имеют в  $\mathfrak{X}^r(D)$  «бесконечную» степень негрубости.

## 2. Плотность $\Sigma_1^r$

Докажем плотность  $\Sigma_1^r$  во множестве  $\mathfrak{X}^r(D, SO(2)) \setminus \Sigma_0^r$ . Пусть  $X \in \mathfrak{X}^r(D, SO(2)) \setminus \Sigma_0^r$ . Зададим окрестность  $U(X)$  поля  $X$  в  $\mathfrak{X}^r(D, SO(2))$  и покажем, что существует поле  $\tilde{X} \in \Sigma_1^r \cap U(X)$ .

Возможны только следующие случаи:

(А)  $f(0) = 0$ .

(Б)  $f(0) \neq 0$ ,  $f(u_0) = f'(u_0) = 0$  при некотором  $u_0 \in (0, 1)$ .

(В) Функция  $f$  имеет на  $(0, 1)$  простые нули,  $f(0) \neq 0$ ,  $f(1) = 0$ .

(Г) Функция  $f$  имеет на  $(0, 1)$  простые нули,  $f(0) \neq 0$ ,  $f(1) \neq 0$  и  $f(u_0) = g(u_0) = 0$  при некотором  $u_0 \in (0, 1)$ .

В случае (А)  $f(u) = u f_1(u)$ , где  $f_1 \in C^\infty[0, 1]$ . Введем функции

$$f_{1,\alpha}(u) = f_1(u) - \alpha, \quad g_\beta(u) = g(u) - \beta, \quad u \in [0,1], \quad (3)$$

и векторные поля  $X^{\alpha,\beta} \in \mathfrak{X}^r(D, SO(2))$ , имеющие в полярных координатах вид  $\rho^3 f_{1,\alpha}(\rho^2) \partial / \partial \rho + g_\beta(\rho^2) \partial / \partial \varphi$ . При достаточно малом  $\delta > 0$   $X^{\alpha,\beta} \in U(X)$  для всех  $\alpha, \beta \in (0, \delta)$ . Вследствие теоремы Сарда [7]  $f_1$  и  $g$  имеют некритические значения, соответственно,  $\alpha_0$  и  $\beta_0$ , принадлежащие  $(0, \delta)$ . Тогда функции  $f_{1,\alpha_0}$  и  $g_{\beta_0}$  имеют на  $[0,1]$  только простые нули. При  $\alpha \in (0, \alpha_0)$ , достаточно близком к  $\alpha_0$ ,  $f_{1,\alpha}$  имеет только простые нули, они не совпадают с нулями  $g_{\beta_0}$ , при этом  $f_{1,\alpha}(0) \neq 0$ ,  $f_{1,\alpha}(1) \neq 0$ . Но тогда  $\tilde{X} = X^{\alpha,\beta_0} \in \Sigma_{1,1}^r \cap U(X)$ .

В случае (Б)  $f(u) = (u - u_0)^2 f_1(u)$ , где  $f_1 \in C^\infty[0,1]$ . Функции  $f_{1,\alpha}$  и  $g_\beta$  определим равенствами (3) а векторные поля  $X^{\alpha,\beta} \in \mathfrak{X}^r(D, SO(2))$  равенством

$$X^{\alpha,\beta} = \rho(\rho^2 - u_0)^2 f_{1,\alpha}(\rho^2) \partial / \partial \rho + g_\beta(\rho^2) \partial / \partial \varphi.$$

Выберем  $\beta_0$  и  $\alpha$  так же, как в случае (А). Тогда  $\tilde{X} = X^{\alpha,\beta_0} \in \Sigma_{1,2}^r \cap U(X)$ .

В случае (В)  $f(u) = (u - 1) f_1(u)$ , где  $f_1 \in C^\infty[0,1]$ . Определим функции  $f_{1,\alpha}$  и  $g_\beta$  равенствами (3), а векторное поле  $X^{\alpha,\beta}$  равенством

$$X^{\alpha,\beta} = \rho(\rho^2 - 1) f_{1,\alpha}(\rho^2) \partial / \partial \rho + g_\beta(\rho^2) \partial / \partial \varphi.$$

Числа  $\alpha, \beta$  можно выбрать так, что  $X^{\alpha,\beta} \in U(X)$ ,  $f_{1,\alpha}$  и  $g_\beta$  имеют на  $[0,1]$  только простые нули, и не имеют общих нулей,  $f_{1,\alpha}(0) \neq 0$ ,  $f_{1,\alpha}(1) \neq 0$ . Поэтому  $\tilde{X} = X^{\alpha,\beta} \in \Sigma_{1,3}^r \cap U(X)$ .

В случае (Г), при достаточно малом  $\mu > 0$ , векторное поле

$$\tilde{X} = \rho f(\rho^2) \partial / \partial \rho + (g(\rho^2) + \mu(\rho^2 - u_0)) \partial / \partial \varphi$$

принадлежит  $\Sigma_{1,4}^r \cap U(X)$ .

### 3. Функционал $F$ . Достаточность условий первой степени негрубости

Докажем, что  $\Sigma_1^r$  – открытое подмножество в  $\mathfrak{X}^r(D, SO(2)) \setminus \Sigma_0^r$ , состоит из векторных полей первой степени негрубости и зададим функционалы  $F$ , о которых идет речь в теореме. Достаточно для любого  $X_0 \in \Sigma_1^r$

найти  $C^\infty$ -функционал  $F : V(X_0) \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $V(X_0)$  некоторая окрестность поля  $X_0$  в  $\mathcal{X}^r(D, SO(2))$ , такой, что

(С)  $\forall X \in V(X_0)$  линейный функционал  $F'(X) : \mathcal{X}^r(D, SO(2)) \rightarrow \mathbb{R}$  ненулевой, множество  $\{X \in V(X_0) : F(X) = 0\}$  содержится в  $\Sigma_1^r$  и состоит из векторных полей, топологически эквивалентных  $X_0$ , а множество  $X \in V(X_0)$ , для которых  $F(X) \neq 0$ , содержится в  $\Sigma_0^r$ .

При построении  $F$  будем в основном следовать работе [8]. Векторное поле  $X \in \mathcal{X}^r(D, SO(2))$  можно записать в полярных координатах в виде  $\hat{P}(\rho, X)\partial/\partial\rho + \hat{\Phi}(\rho, X)\partial/\partial\varphi$ , где  $\hat{P}$  и  $\hat{\Phi}$  – такие  $C^\infty$ -функции на  $[-1, 1] \times \mathcal{X}^r(D, SO(2))$ , что  $\hat{P}(-\rho, X) \equiv -\hat{P}(\rho, X)$ ,  $\hat{\Phi}(-\rho, X) \equiv \hat{\Phi}(\rho, X)$ .

Пусть  $X_0 \in \Sigma_{1,1}^r$ . Так как,  $\hat{P}(0, X_0) = \hat{P}'_\rho(0, X_0) = \hat{P}''_{\rho\rho}(0, X_0) = 0$ ,  $\sigma := \text{sgn} \hat{P}'''_{\rho\rho\rho}(0, X_0) \neq 0$ , а  $\hat{P}(\cdot, X)$  – нечетная функция, то существуют такие число  $\varepsilon > 0$  и окрестность  $V(X_0)$  поля  $X_0$  в  $\mathcal{X}^r(D, SO(2))$ , что для всех  $(\rho, X) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times V(X_0)$

$$\hat{P}(0, X) = \hat{P}'_{\rho\rho}(0, X) = 0, \quad \text{sgn} \hat{P}'''_{\rho\rho\rho}(\rho, X) = \sigma, \quad \text{sgn} \hat{P}(\varepsilon, X) = \sigma. \quad (4)$$

Поскольку  $\hat{\Phi}(0, X_0) \neq 0$ , то  $\varepsilon$  и  $V(X_0)$  можно считать выбранными так, что

$$\forall (\rho, X) \in (0, \varepsilon) \times V(X_0) \quad \hat{\Phi}(\rho, X) \neq 0. \quad (5)$$

Положим  $F(X) := \hat{P}'_\rho(0, X)$ ,  $X \in V(X_0)$ . Возьмем векторное поле  $h = \rho\partial/\partial\rho \in \mathcal{X}^r(D, SO(2))$ . Тогда

$$F(X_0 + \tau h) = \tau, \quad F'(X_0)h = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} F(X_0 + \tau h) = 1 \neq 0,$$

и потому  $F'(X_0) \neq 0$  ненулевой функционал. Уменьшив при необходимости окрестность  $V(X_0)$ , можно считать, что  $\forall X \in V(X_0)$   $F'(X) \neq 0$ , функция  $\hat{P}(\cdot, X)$  имеет на отрезке  $[\varepsilon, 1]$  только простые нули, принадлежащие интервалу  $(\varepsilon, 1)$ , непрерывно зависящие от  $X$  и не совпадающие с нулями  $\hat{\Phi}(\cdot, X)$ . Кроме того, ввиду (4) и (5) имеем следующие утверждения:

1) если  $F(X) = 0$ , то  $\rho = 0$  – единственный, причем трехкратный нуль  $\hat{P}(\cdot, X)$  на отрезке  $[0, \varepsilon]$ ,  $\text{sgn} \hat{P}'''_{\rho\rho\rho}(0, X) = \sigma$ ,

2) если  $\operatorname{sgn} F(X) = \sigma$ , то  $\rho = 0$  – единственный, причем простой нуль  $\hat{P}(\cdot, X)$  на  $[0, \varepsilon]$ ,  $\operatorname{sgn} \hat{P}'_\rho(0, X) = \sigma$ ,

3) если  $\operatorname{sgn} F(X) = -\sigma$ , то  $\hat{P}(\cdot, X)$  имеет на  $[0, \varepsilon]$  два простых нуля:  $\rho_1 = 0$ , для которого  $\operatorname{sgn} \hat{P}'_{\rho_1}(0, X) = -\sigma$ , и  $\rho_2(X)$ , для которого  $\hat{P}(\rho_2(X), X) \neq 0$ .

Следовательно, векторное поле  $X$  при  $F(X) = 0$  принадлежит  $\Sigma'_{1,1}$ ; оно имеет в начале координат двукратный фокус, устойчивый (неустойчивый), если  $\sigma = -1$  ( $\sigma = 1$ ), и столько же гиперболических замкнутых траекторий, что и у  $X_0$ . Поэтому оно топологически эквивалентно  $X_0$ . При  $F(X) \neq 0$  поле  $X$  принадлежит  $\Sigma'_0$ . Таким образом,  $F$  удовлетворяет условиям (С).

Все векторные поля  $X$  для которых  $F(X) < 0$  ( $F(X) > 0$ ) имеют устойчивый (неустойчивый фокус) и одинаковое число замкнутых траекторий. Поэтому все они топологически эквивалентны. Таким образом, при переходе поля  $X$  из области с  $\operatorname{sgn} F(X) = \sigma$  в область с  $\operatorname{sgn} F(X) = -\sigma$  фокус меняет устойчивость и из него рождается грубый цикл, устойчивый (неустойчивый) при  $\sigma = -1$  ( $\sigma = 1$ ).

Пусть  $X_0 \in \Sigma'_{1,2}$ . Так как  $\hat{P}'_\rho(\rho_0, X_0) = 0$ ,  $\sigma := \hat{P}''_{\rho\rho}(\rho_0, X_0) \neq 0$ , то существуют число  $\varepsilon > 0$ , окрестность  $V(X_0)$  поля  $X_0$  в  $\mathcal{X}^r(D, SO(2))$  и  $C^\infty$ -функция  $m: V(X_0) \rightarrow (\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon)$ , такие, что

$$m(X_0) = \rho_0, \quad (6)$$

$$\forall(\rho, X) \in (\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon) \times V(X_0) \\ \hat{P}'_\rho(\rho, X) = 0 \Leftrightarrow \rho = m(X), \quad (7)$$

$$\operatorname{sgn} \hat{P}''_{\rho\rho}(\rho, X) = \sigma, \quad \operatorname{sgn} \hat{P}(\rho_0 \pm \varepsilon, X) = \sigma. \quad (8)$$

Поскольку  $\hat{P}(\rho_0, X_0) \neq 0$ , то  $\varepsilon$  и  $V(X_0)$  можно считать выбранными так, что

$$\forall(\rho, X) \in (\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon) \times V(X_0) \quad \hat{P}(\rho, X) \neq 0. \quad (9)$$

Положим  $F(X) := \hat{P}(m(X), X)$ ,  $X \in V(X_0)$ . Возьмем векторное поле  $h = \rho \partial / \partial \rho \in \mathcal{X}^r(D, SO(2))$ . Тогда  $\hat{P}(\rho, X_0 + \tau h) = \hat{P}(\rho, X_0) + \tau \rho$ ,

$$F(X_0 + \tau h) = \hat{P}(m(X_0 + \tau h), X_0) + \tau m(X_0 + \tau h).$$

Отсюда и из (6) – (7) получаем

$$F'(X_0)h = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} F(X_0 + \tau h) = \hat{P}'_{\rho}(X_0, X_0) \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} m(X_0 + \tau h) + \rho_0 = \rho_0 \neq 0.$$

Поэтому  $F'(X_0)$  – ненулевой функционал. Уменьшив при необходимости окрестность  $V(X_0)$ , можно считать, что  $\forall X \in V(X_0)$  функция  $\hat{P}(\cdot, X)$  имеет на  $[0, \rho_0 - \varepsilon] \cup [\rho_0 + \varepsilon, 1)$  только простые нули, непрерывно зависящие от  $X$  и не совпадающие с нулями  $\hat{\Phi}(\cdot, X)$ ,  $\hat{P}(1, X) \neq 0$ . Из (7) – (9) получаем следующие утверждения: 1) если  $F(X) = 0$ , то  $\hat{P}(\cdot, X)$  имеет на  $[\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon]$  единственный, причем двукратный нуль; 2) если  $\text{sgn } F(X) = \sigma$ , то  $\hat{P}(\cdot, X)$  не имеет нулей на  $[\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon]$ ; 3) если  $\text{sgn } F(X) = -\sigma$ , то  $\hat{P}(\cdot, X)$  имеет на  $[\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon]$  два простых нуля не совпадающие с нулями  $\hat{\Phi}(\cdot, X)$ . Соответственно, векторное поле  $X$  при  $F(X) = 0$  имеет двойной цикл – окружность  $\rho = \rho_0$ , остальные замкнутые траектории гиперболические и лежащие внутри  $D$ , а начало координат – грубый фокус. Поэтому поле  $X \in \Sigma'_{1,1}$ , и оно топологически эквивалентно  $X_0$ . При  $F(X) \neq 0$  поле  $X$  принадлежит  $\Sigma'_0$ . Таким образом,  $F$  удовлетворяет условиям (С).

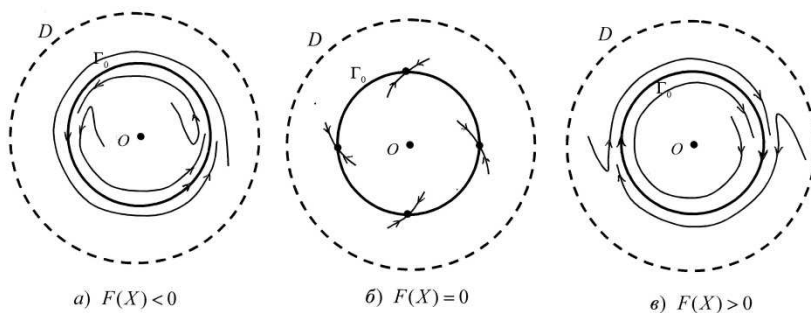
При переходе поля  $X$  из области с  $\text{sgn } F(X) = -\sigma$  в область с  $\text{sgn } F(X) = \sigma$  два грубых цикла «сливаются» в один и исчезают.

При  $X_0 \in \Sigma'_{1,3}$  нетрудно проверить, что  $F(X) := \hat{P}(1, X)$ ,  $X \in V(X_0)$  – искомый функционал, если окрестность  $V(X_0)$  достаточно мала. Бифуркация при переходе из области с  $\hat{P}'_{\rho}(1, X_0)F(X) > 0$  в область с  $\hat{P}'_{\rho}(1, X_0)F(X) < 0$  состоит в «исчезновении» цикла из  $D$ .

Пусть  $X_0 \in \Sigma'_{1,4}$  и  $\hat{P}(\rho_0, X) = \hat{\Phi}(\rho_0, X) = 0$ . Так как  $\hat{P}'_{\rho}(\rho_0, X) \neq 0$ , то существуют такие число  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \min\{\rho_0, 1 - \rho_0\}$ , окрестность  $V(X_0)$  поля  $X_0$  в  $\mathcal{X}^r(D, SO(2))$  и  $C^\infty$ -функция  $\rho_* : V(X_0) \rightarrow (\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon)$ , такая, что

$$\forall (\rho, X) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times V(X_0) \quad \hat{P}(\rho, X) = 0 \Leftrightarrow \rho = \rho_*(X).$$

Мы можем считать, что  $\forall(\rho, X) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times V(X_0) \hat{\Phi}'_\rho(\rho, X) \neq 0$ ,  $\rho \in (\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon)$ ,  $\forall X \in V(X_0) \hat{P}(\rho, X)$  имеет на  $[0, \rho_0 - \varepsilon] \cup [\rho_0 + \varepsilon, 1]$  простые нули, непрерывно зависящие от  $X$  и не совпадающие с нулями функции  $\hat{\Phi}(\cdot, X)$ , а  $\hat{P}(1, X) \neq 0$ . Положим  $F(X) := \hat{\Phi}(\rho_*(X), X)$ . Нетрудно видеть, что  $F$  – удовлетворяет условиям (С). Бифуркация при переходе из области с  $F(X) < 0$  в область с  $F(X) > 0$  состоит в смене ориентации на цикле  $\rho = \rho_*(X)$ , задаваемой полем  $X$ , на противоположную, устойчивость цикла при этом не меняется (рис. 1).



**Рис. 1.** Бифуркации векторного поля  $X_0 \in \Sigma'_{1,4}$  в окрестности его инвариантного множества из особых точек  $\Gamma_0$

#### 4. Необходимость условий первой степени негрубости

Пусть векторное поле  $X_0 \in \mathfrak{X}^r(D, SO(2)) \setminus \Sigma'_0 \setminus \Sigma'_1$ . Запишем его в виде (1) – (2). Покажем, что  $X_0$  не является векторным полем первой степени негрубости. Предположим на время, что  $X_0$  – первой степени негрубости. Тогда существует окрестность  $V(X_0)$  поля  $X_0$ , такая, что любое векторное поле  $X \in V(X_0) \setminus \Sigma'_0$  топологически эквивалентно  $X_0$ . Поскольку в  $V(X_0)$  есть векторные поля из  $\Sigma'_1$ , то у функции  $f$  на  $[0, 1]$  конечное число нулей и имеет место один из следующих вариантов:

а)  $f'(0) = f''(0) = 0$ , в нулях, принадлежащих  $(0, 1)$ , функция  $f$  меняет знак,  $f(1) \neq 0$ ;

б) при некотором  $u_0 \in (0, 1)$   $f(u_0) = f'(u_0) = f''(u_0) = 0$ , в нулях, принадлежащих  $(0, 1)$  и отличных от  $u_0$ , функция  $f$  меняет знак,  $f(1) \neq 0$ ;

в)  $f(1) = f'(1) = 0$ , в нулях, принадлежащих  $(0,1)$ , функция  $f$  меняет знак.

Рассмотрим векторное поле  $X_\mu \in \mathfrak{X}^r(D, SO(2)) \setminus \Sigma_0^r$ , имеющее в полярных координатах вид  $\rho(f(\rho^2) - \mu\Delta(\rho^2))\partial/\partial\rho + \Phi(\rho)\partial/\partial\varphi$ , где в случае а)  $\Delta(u) = \sigma u^2$ ,  $\sigma = \operatorname{sgn} f(u)$  для  $u$  из правой полуокрестности точки 0, в случае б)  $\Delta(u) = \sigma(u - u_0)^2$ , в случае в)  $\Delta(u) = \sigma(1 - u)$ ,  $\sigma = \operatorname{sgn} f(u)$  для  $u$  из левой полуокрестности точки 1. При достаточно малых  $\mu > 0$  поле  $X_\mu \in V(X_0)$  и потому топологически эквивалентно  $X_0$ . Но  $f - \mu\Delta$  имеет на  $[0,1]$  больше нулей, чем  $f$ . Соответственно,  $X_\mu$  имеет больше инвариантных окружностей, чем  $X_0$ , что противоречит топологической эквивалентности  $X_0$  и  $X_\mu$ . Поэтому сделанное предположение неверно. Следовательно,  $X_0 \in \mathfrak{X}^r(D, SO(2)) \setminus \Sigma_0^r \setminus \Sigma_1^r$  не является векторным полем первой степени негрубости.

Тем самым, все утверждения теоремы доказаны.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ройтенберг В.Ш.* О типичных однородных векторных полях на плоскости // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2018. № 2. С. 15–26. DOI 10.21685/2072-3040-2018-2-2
2. *Ройтенберг В.Ш.* Грубость векторных полей на плоскости, инвариантных относительно конечной группы вращений // Вестн. Адыгейского гос. ун-та. Сер. «Естеств.-мат. и техн. науки» 2018. № 3 (226). С. 13–19.
3. *Ройтенберг В.Ш.* Грубость векторных полей на плоскости, инвариантных относительно группы вращений // Научные ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2018. Т. 50, № 4. С. 398–404. DOI 10.18413/2075-4639-2018-50-4-398-404.
4. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978. 304 с.
5. *Палис Ж.* Геометрическая теория динамических систем. Введение / Ж. Палис, В. Мелу. М.: Мир, 1986. 301 с.
6. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И.Гордон, А.Г. Майер. М.: Наука. 1967. 488 с.
7. *Хирш М.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979. 280 с.
8. *Sotomayor J.* Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds // Publ. Math. IHES. 1974. V. 43. P. 5–46.



УДК 519.86, 330.4

**А. Д. Тихонова, В. В. Абрамов**

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина  
Россия, г. Рязань, e-mail: a.ogonechik@yandex.ru,  
v.abramov@365.rsu.edu.ru

## **О КОЛЕБАНИЯХ ФОНДОВ В МОДЕЛИ СОЛОУ**

*Исследована модель Солоу с сезонным экономическим укладом. Установлен факт существования устойчивого колебательного режима изменения фондов.*

**Ключевые слова:** модель Солоу, цикл, производственные фонды, дифференциальное уравнение, устойчивость.

**A. D. Tikhonova, V. V. Abramov**

S.A. Yesenin Ryazan State University  
Russia, Ryazan, e-mail: a.ogonechik@yandex.ru,  
v.abramov@365.rsu.edu.ru

## **ABOUT OSCILLATIONS OF FUNDS IN SOLOW'S MODEL**

*The Solow's model with a seasonal economic structure has been studied. The existence of a stable oscillatory mode of changing funds is established.*

**Keywords:** Solow's model, cycle, production funds, differential equation, stability.

Рассмотрим модель односекторной экономики по Р. Солоу [1]. В отличие от классического подхода, предположим, что количество использованного труда (или число занятых в экономике) не является экспоненциальной функцией времени. Такого рода случаи рассматривались при решении различных задач в работах [2–5]. В данной работе мы исследуем вопрос о циклических изменениях величины фондов, использованных для производства, если экономика испытывает «сезонные» влияния.

Допустим, производственная функция является мультипликативной  $X = A(t)K^{\alpha_1}L^{\alpha_2}$ , где  $A(t)$  – коэффициент нейтрального технического прогресса;  $K$  и  $L$  – величины производственных фондов и труда, использованные в экономике;  $\alpha_1 \neq 1$  и  $\alpha_2$  – показатели эластичности производственной функции по фондам и по труду. (Условие Кобба–Дугласа здесь не принципиально.) Тогда динамика фондов удовлетворяет уравнению Бернулли

$$\dot{K} + \mu(t)K = l(t)K^{\alpha}, \quad (1)$$

в котором  $l(t) = \rho(t)A(t)L(t)^{\alpha_2}$ ,  $L = L(t)$  – известная функция;  $\mu(t) \in (0, 1)$  – доля выбывших за единицу времени производственных фондов (норма амортизации);  $\rho(t) \in (0, 1)$  – доля инвестиций в валовом продукте (норма накопления). Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1) – интегрируемые  $T$ -периодические функции, что соответствует влиянию сезонного фактора на экономический уклад. Вопрос о циклическом изменении величины фондов сводится к формальной задаче о существовании устойчивого  $T$ -периодического решения уравнения (1) в области  $K > 0$ .

Следуя обычной процедуре интегрирования уравнения Бернулли, сведем уравнение (1) к линейному неоднородному дифференциальному уравнению относительно новой зависимой переменной  $x = K^{1-\alpha_1}$ . Обозначим

$\varphi(t) = \exp\left(- (1-\alpha_1) \int_0^t \mu(s) ds\right)$  – фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения;

$\lambda(t) = (1-\alpha_1)\varphi(t) \int_0^t l(s)(\varphi(s))^{-1} ds$  – частное решение соответствующего неоднородного уравнения. При начальном условии  $K(0) = K_0$  получим частный интеграл уравнения (1)

$$K^{1-\alpha_1} = \varphi(t)K_0^{1-\alpha_1} + \lambda(t). \quad (2)$$

Так как в области  $K > 0$  уравнение (1) имеет  $T$ -периодические коэффициенты, удовлетворяет условиям существования и единственности частного решения, то начальное значение  $K_0$  для  $T$ -периодического решения уравнения (1) удовлетворяет уравнению [6]

$$K(T) = K_0. \quad (3)$$

В силу равенства (2) уравнение (3) запишем в следующем виде:

$$(1 - \varphi(T))K_0^{1-\alpha_1} = \lambda(T). \quad (4)$$

Заметим, что по экономическому смыслу коэффициентов уравнения (1) на промежутке  $[0, T]$  функция  $\rho(t)A(t)(L(t))^{\alpha_2}(\varphi(t))^{-1}$  имеет положительное среднее интегральное значение. Кроме того,  $K_0 > 0$ . Если  $\alpha_1 \in (0, 1)$  (неоклассический случай), то имеем:  $1 - \alpha_1 > 0$ ,  $\varphi(T) < 1$ ,  $\lambda(T) > 0$ . Если  $\alpha_1 > 1$  (классический случай), то имеем:  $1 - \alpha_1 < 0$ ,  $\varphi(T) > 1$ ,  $\lambda(T) < 0$ . Следовательно, в обоих случаях уравнение (4) имеет единственное положительное решение. То есть уравнение (1) имеет единственное  $T$ -периодическое решение с начальным значением

$$K_0 = \left( \frac{\lambda(T)}{1 - \varphi(T)} \right)^{\frac{1}{1 - \alpha_1}}.$$

В силу равенства (2) это решение имеет вид

$$\bar{K}(t) = \left( \frac{\lambda(T)\varphi(t)}{1 - \varphi(T)} + \lambda(t) \right)^{\frac{1}{1 - \alpha_1}}. \quad (5)$$

Заметим, что решение (5) в исключительных случаях может оказаться стационарным. Допустим, процессы амортизации и роста фондов сбалансированы за счет управления нормой накопления или процессом привлечения труда в экономику, то есть выполняется условие

$$\exists B = \text{const} : l(t)/\mu(t) \equiv B. \quad (6)$$

При условии (6) нормальная форма уравнения (1) имеет вид  $\dot{K} = f(t, K) = \mu(t)(B - K^{1 - \alpha_1})K^{\alpha_1}$ . Так как  $f(t, K^*) \equiv 0$  при  $K^* = B^{1/(1 - \alpha_1)}$  и всех  $t > 0$ , то в этом случае периодическое решение (5) вырождается в стационарное решение  $K = K^*$ . При  $\alpha_1 \in (0, 1)$  для любого  $K \neq K^*$  справедлива оценка  $(K - K^*)f(t, K) < 0$ , и потому  $K = K^*$  – асимптотически устойчивое в целом стационарное решение уравнения (1).

Далее предполагаем, что условие (6) не выполняется. Тогда периодическое решение уравнения (1) соответствует нестационарному циклическому процессу изменения фондов. Для практической наблюдаемости такого цикла требуется его асимптотическая устойчивость.

Пусть  $\alpha_1 < 1$ . В уравнении (1) выполним подстановку  $x = K^{1 - \alpha_1}$ . Получим линейное уравнение

$$\dot{x} = -(1 - \alpha_1)\mu(t)x + (1 - \alpha_1)l(t). \quad (7)$$

В рассматриваемом случае для фундаментального решения  $\varphi(t)$  уравнения (7)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$  и потому найдется такое  $C > 0$ , что

$$\forall t \geq 0 \quad |\varphi(t)| \leq C. \quad (8)$$

Решению  $K(t)$  уравнения (1) соответствует решение  $x(t) = K^{1 - \alpha_1}(t)$  уравнения (7), при этом периодическому решению  $\bar{K}(t)$  уравнения (1) соответствует периодическое решение  $\bar{x}(t) = \bar{K}^{1 - \alpha_1}(t)$  уравнения (7). Тогда

$$x(t) - \bar{x}(t) = (x(0) - \bar{x}(0))\varphi(t). \quad (9)$$

Пусть

$$m_1 = 0,5 \min_{t \in [0, T]} \bar{K}(t) > 0, \quad M_1 = \max_{t \in [0, T]} \bar{K}(t) + m_1,$$

$$m_2 = 0,5 \min_{t \in [0, T]} \bar{x}(t) > 0, \quad M_2 = \max_{t \in [0, T]} \bar{x}(t) + m_2.$$

Тогда существует такие числа  $D_1 > 0$  и  $D_2 > 0$ , что

$$\forall x_1, x_2 \in [m_2, M_2] \left| x_2^{\frac{1}{1-\alpha_1}} - x_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}} \right| \leq D_1 |x_2 - x_1|, \quad (10)$$

$$\forall K \in [m_1, M_1] \left| K^{1-\alpha_1} - \bar{x}(0) \right| \leq D_2 |K - \bar{K}(0)|. \quad (11)$$

Зададим теперь  $\varepsilon > 0$  и выберем  $\delta > 0$  так, чтобы

$$\delta < m_2 / CD_2, \quad (12)$$

$$\delta < \varepsilon / CD_1 D_2, \quad (13)$$

$$m_1 < \bar{K}(0) - \delta < \bar{K}(0) - \delta < M_1. \quad (14)$$

Пусть

$$\bar{K}(0) - \delta < K(0) < \bar{K}(0) - \delta. \quad (15)$$

Из (15), (14) и (11) получаем

$$|x(0) - \bar{x}(0)| < D_2 |K(0) - \bar{K}(0)|. \quad (16)$$

Из (8), (9), (16), (15) и (12) следует, что  $\forall t \geq 0$

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \leq C |x(0) - \bar{x}(0)| \leq CD_2 |K(0) - \bar{K}(0)| \leq CD_2 \delta < m_2$$

и потому  $\forall t \geq 0 \quad x(t) \in [m_2, M_2]$ . Теперь из (10) имеем

$$\forall t \geq 0 \quad |K(t) - \bar{K}(t)| \leq D_1 |x(t) - \bar{x}(t)|. \quad (17)$$

Из (17) и (9) получаем

$$\forall t \geq 0 \quad |K(t) - \bar{K}(t)| \leq D_1 |x(0) - \bar{x}(0)| \varphi(t).$$

Отсюда из (8), (16), (15), (13) и равенства  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$  следует, что при всех  $t \geq 0 \quad |K(t) - \bar{K}(t)| \leq CD_1 D_2 \delta < \varepsilon$ , а  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |K(t) - \bar{K}(t)| = 0$ , то есть решение  $\bar{K}(t)$  – асимптотически устойчиво.

В результате приходим к следующим выводам. Если односекторная экономика:

1) удовлетворяет условиям Солоу,

2) имеет сезонный уклад с периодом  $T$ ,

3) характеризуется мультипликативной производственной функцией  $X = A(t)K^{\alpha_1}L^{\alpha_2}$ ,

4) производственная функция неэластична по величине использованных фондов, то есть  $0 < \alpha_1 < 1$ ,

5) доля инвестиций и величина привлеченного труда  $L(t)$  согласованы с сезонным укладом экономики, то есть задаются функциями периода  $T$ ,

б) процессы амортизации фондов и роста фондов за счет инвестиций несбалансированы (не выполняется условие (б)), то справедливы утверждения:

а) существует единственный колебательный режим изменения фондов  $\bar{K}(t)$ , задаваемый равенством (5) и имеющий период  $T$ ,

б) колебательный режим изменения фондов асимптотически устойчив.

в) при любых начальных факторах с течением времени величина произведенного экономикой продукта приближается к зависимости  $X = A(t)\bar{K}(t)^{\alpha_1}L(t)^{\alpha_2}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Solow R.M. A Contribution to the Theory of Economic Growth // Quarterly Journal of Economics. 1956. № 70. P. 65–94.
2. Абрамов В.В. Качественное исследование модели односекторной экономики // Изв. РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2007. № 12. С. 11–15.
3. Абрамов В.В. Стабилизация равновесия в модели типа Солоу / В.В. Абрамов, Н.М. Кудряшова // Вестник РГРТУ. № 1 (вып. 51). 2015. С. 113–118.
4. Лискина Е.Ю. Качественное и численное исследование односекторной модели экономики региона / Е.Ю. Лискина, С.А. Нелюхин // Вестник РАЕН. 2016. Т. 16, № 3. С. 41–47.
5. Лазарева И.А. Построение и идентификация односекторной модели экономики региона, учитывающей конечное потребление и конкуренцию за ограниченные ресурсы / И.А. Лазарева, Е.Ю. Лискина // Вестник РАЕН. 2016. Т. 16, № 3. С. 36–40.
6. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
7. Абрамов В.В. Малое периодическое решение системы с параметром // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. С. 3–12.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

УДК 517

**М. А. Башкин, А. И. Бурцев, А. В. Васильева, Л. В. Березина**

Рыбинский государственный авиационный технический университет  
им. П. А. Соловьева

Россия, г. Рыбинск, e-mail: [m\\_bashkin@list.ru](mailto:m_bashkin@list.ru), [byrzev@rsatu.ru](mailto:byrzev@rsatu.ru),  
[vasileva@rsatu.ru](mailto:vasileva@rsatu.ru), [berezina\\_lv@pisem.net](mailto:berezina_lv@pisem.net)

## ЗАДАЧИ IV МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ (II ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ)

*В статье представлены задачи IV Межрегиональной студенческой олимпиады по математике (II этап Всероссийской студенческой олимпиады). Приведены их решения и статистика.*

**Ключевые слова:** олимпиадные задачи, научное творчество студентов, математическая подготовка.

**M. A. Bashkin, A. I. Burzev, A. V. Vasileva, L. V. Berezina**

P. A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University  
Russia, Rybinsk, e-mail: [m\\_bashkin@list.ru](mailto:m_bashkin@list.ru), [byrzev@rsatu.ru](mailto:byrzev@rsatu.ru),  
[vasileva@rsatu.ru](mailto:vasileva@rsatu.ru), [berezina\\_lv@pisem.net](mailto:berezina_lv@pisem.net)

## THE TASKS OF IV INTERREGIONAL STUDENT MATHEMATICAL OLYMPIAD (II STAGE OF THE ALL-RUSSIAN STUDENT OLYMPIAD)

*The article presents the tasks of the IV Interregional Student Mathematical Olympiad (II stage of the All-Russian Student Olympiad). Solutions and statistics are given.*

**Keywords:** olympiad tasks, the scientific creativity of students, mathematical training.

В статье представлены задачи IV Межрегиональной студенческой олимпиады по математике (II этап Всероссийской студенческой олимпиады), которая состоялась 8 декабря 2018 года в Рыбинском государственном

ном авиационном техническом университете им. П. А. Соловьева. Олимпиадные задания были разработаны отдельно для студентов первого и старших курсов. Статья является продолжением работ [1] и [2].

### Задачи для студентов первого курса

**Задача 1.** Пастух, которому вчера исполнилось  $m$  лет, пасёт  $n$  коров. Он сосчитал в уме, что  $3n(2n + 5) - m(n + 4) = 1$ . Сколько лет пастуху?

*Решение.*

$$3n(2n + 5) - m(n + 4) = 1 \Rightarrow 6n^2 + 15n - mn - 4m = 1 \Rightarrow m = \frac{6n^2 + 15n - 1}{n + 4}.$$

$m = \frac{6n^2 + 15n - 1}{n + 4} \Rightarrow m = 6n - 9 + \frac{35}{n + 4}$ .  $m$  – натуральное число, значит,  $n + 4$  делит 35.

Отсюда  $n + 4 \in \{1, 5, 7, 35\}$ . Следовательно,  $n \in \{1, 3, 31\}$  и соответственно  $m \in \{4, 14, 178\}$ .

4 года слишком молод, 178 лет слишком стар.

*Ответ:* 14 лет.

**Задача 2.** Доказать неравенство  $x^4 + 1 \geq x^3 + x$ .

*Решение.*

$$x^4 + 1 \geq x^3 + x \Leftrightarrow x^4 - x^3 - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^3 - 1) \geq 0.$$

$$(x - 1)(x^3 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x^2 + x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \left( \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right) \geq 0.$$

**Задача 3.** Решить уравнение  $3 \sin x + 4 \cos x = -5 - \frac{1}{|x|}$ .

*Решение.*  $3 \sin x + 4 \cos x = 5 \sin(x + \varphi) \geq -5$  для всех  $x$ ,  $\varphi = \arcsin \frac{4}{5}$ .

С другой стороны  $\left( -5 - \frac{1}{|x|} \right) < 0$  для всех  $x$ . Следовательно, уравнение не имеет решений.

*Ответ:* уравнение не имеет решений.

**Задача 4.** Доказать, что число  $\sqrt[3]{44 + 18\sqrt{6}} - \sqrt[3]{44 - 18\sqrt{6}}$  – целое и найти его.

*Решение.* Пусть  $x = \sqrt[3]{44 + 18\sqrt{6}} - \sqrt[3]{44 - 18\sqrt{6}}$ . Тогда

$$x^3 = |44+18\sqrt{6}| - |44-18\sqrt{6}| - 3\sqrt[3]{44-18\sqrt{6}}|44+18\sqrt{6}|.$$

$$44^2 = 1936, \quad 18^2 \cdot 6 = 1944, \quad x^3 = 44 + 18\sqrt{6} + 44 - 18\sqrt{6} - 3\sqrt[3]{8x} = 88 - 6x.$$

Таким образом,  $x$  является корнем уравнения  $x^3 + 6x - 88 = 0$ .

$$x^3 + 6x - 88 = (x - 4)(x^2 + 4x + 22) = (x - 4)((x + 2)^2 + 6).$$

Отсюда следует, что уравнение  $x^3 + 6x - 88 = 0$  имеет единственный корень  $x = \sqrt[3]{44 + 18\sqrt{6}} - \sqrt[3]{44 - 18\sqrt{6}} = 4 \in N$ .

*Ответ:* 4.

**Задача 5.** Известны уравнения двух сторон ромба  $3x - 4y + 7 = 0$ ,  $4y - 3x - 10 = 0$  и уравнение одной из его диагоналей  $x - y + 2 = 0$ . Составить уравнение вписанной в ромб окружности.

*Решение.*  $L_1: 3x - 4y + 7 = 0$  и  $L_2: 3x - 4y + 10 = 0$  – стороны ромба.  $L_3: x - y + 2 = 0$  – диагональ ромба. Прямые  $L_1$  и  $L_2$  параллельны. Точка  $A(-1, 1)$  – пересечение прямых  $L_1$  и  $L_3$ . Точка  $B(2, 4)$  – пересечение прямых  $L_2$  и  $L_3$ . Центр искомой окружности  $C$  лежит на середине отрезка  $AB$  (рис. 1). Поэтому  $C\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ . Диаметр  $d$  искомой окружности равен расстоянию между прямыми  $L_1$  и  $L_2$ :

$$d = \frac{|3 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 + 10|}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5}.$$

Уравнение искомой окружности –

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{100}.$$

*Ответ:*

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{100}.$$

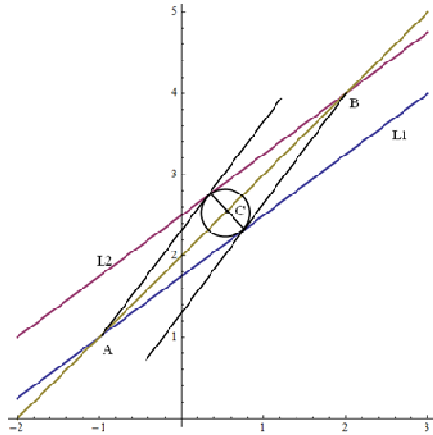


Рис. 1



**Задача 6.** Доказать, что уравнение  $x^{n+1} = P(x)$ , где  $P(x)$  – многочлен  $n$ -й степени с положительными коэффициентами, имеет на полуоси  $(0, +\infty)$  ровно один корень.

*Решение.* На полуоси  $(0, +\infty)$  уравнение  $x^{n+1} = P(x) \Leftrightarrow 1 = \frac{P(x)}{x^{n+1}}$ .

Функция  $f(x) = \frac{P(x)}{x^{n+1}}$  является суммой функций вида  $\frac{a}{x^k}$ , где  $a > 0$  и  $k > 0$  и, следовательно, является строго убывающей на  $(0, +\infty)$ . При  $x \rightarrow +0$   $f(x) \rightarrow +\infty$ , при  $x \rightarrow +\infty$   $f(x) \rightarrow 0$ . Функция  $f(x)$  непрерывная строго убывающая на  $(0, +\infty)$  от  $+\infty$  до 0 и поэтому принимает значение, равное 1 в единственной точке.

*Ответ:* 24.

**Задача 7.**  $A$  – матрица порядка 3, все элементы которой больше 100. Может ли быть так, что  $\text{Det}A = -1$ ?

*Решение:*  $\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$ . Умножим первую строку определителя на

$a$  и прибавим её ко второй и третьей строке

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & a^2+1 & a^2+2a \\ a & a^2 & a^2-1 \end{vmatrix} = -1.$$

Прибавим к первому столбцу третий столбец.

$$1 = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & a^2+1 & a^2+2a \\ a & a^2 & a^2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ a^2+3a & a^2+1 & a^2+2a \\ a^2+a-1 & a^2 & a^2-1 \end{vmatrix}.$$

При  $a > 100$  все элементы последнего определителя будут больше 100.

*Ответ:* да.

**Задача 8.**  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^n x$ . Построить график функции  $y = f(x)$ .

*Решение.* Если  $|\cos x| < 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^n x = 0$ . Если  $\cos x = -1$ , то

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^n x$  не существует. Если  $\cos x = 1$ , то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^n x = 1. \quad \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = -\pi + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 2n\pi, \quad n \in Z, \\ 0, & x \neq n\pi, \quad n \in Z \end{cases}. \quad \text{При } x = -\pi + 2n\pi, \quad n \in Z, \text{ функция}$$

$f(x)$  не определена.

*Ответ:* Графиком функции является ось  $Ox$  с выколотыми точками  $x = n\pi, \quad n \in Z$  и точки  $(2n\pi, 1)$ , где  $n \in Z$ .

**Задача 9.** Показать, что все точки перегиба линии  $y = x \sin x$  лежат на кривой  $y^2(4 + x^2) = 4x^2$ .

*Решение.* Если  $(x, y)$  – точка перегиба кривой  $y = x \sin x$ , то  $(x \sin x)'' = 0$ . Следовательно,  $(x \sin x)'' = 2 \cos x - x \sin x$ . Отсюда для точки перегиба кривой  $y = x \sin x$  выполняется равенство  $2 \cos x - x \sin x = 0$ ,

$$\begin{aligned} 2 \cos x - x \sin x = 0 &\Rightarrow 4 \cos^2 x = x^2 \sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x(x^2 + 4) = 4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 \sin^2 x(x^2 + 4) = 4x^2 \end{aligned}$$

Но  $y = x \sin x$ , поэтому  $y^2(x^2 + 4) = 4x^2$ .

**Задача 10.** Точки плоскости раскрашены в два цвета: синий и красный. Доказать, что для любого  $d \in [0, 2018]$ , найдется бесконечное множество точек плоскости одного цвета такое, что из него можно выбрать бесконечное множество различных пар точек, причем расстояние между точками в каждой паре равно  $d$ .

*Решение.* Построим правильный треугольник со стороной длины  $d$ , одна из сторон которого лежит на стороне квадрата, а противоположная ей вершина внутри треугольника. В построенном треугольнике по крайней мере две вершины одного цвета лежат в квадрате и расстояние между ними равно  $d$ . Замостим плоскость квадратами со сторонами длины  $2d$ . В каждом квадрате найдется пара точек одного цвета, расстояние, между которыми равно  $d$ . Поэтому существует бесконечное множество  $M$  одноцветных пар с расстояниями между точками, равными  $d$ . Из  $M$  можно выбрать бесконечное подмножество  $P$  только красных или только синих пар. Объединение всех точек из пар множества  $P$  и есть искомое множество.

### Задачи для студентов старших курсов

**Задача 1.** Найти наименьшее значение функции

$$f(x, y) = x^2 - 6x - 6 \sin y + 2x \sin y - \cos^2 y + 20,$$

заданной на всей плоскости  $\mathbf{R}^2$ .

*Решение.*

$$f(x, y) = x^2 - 6x - 6 \sin y + 2x \sin y - \cos^2 y + 20 = (x - 3 + \sin y)^2 + 10 \geq 10,$$

$$f(3, 0) = 3^2 - 18 - 6 \sin 0 + 6 \sin 0 - \cos^2 0 + 20 = 10.$$

*Ответ:* 10.

**Задача 2.** Доказать, что число  $\sqrt[3]{44 + 18\sqrt{6}} - \sqrt[3]{44 - 18\sqrt{6}}$  – целое и найти его.

**Задача 3.**  $A$  – двоичная (т.е. её элементы – нули и единицы) квадратная невырожденная матрица порядка 6. Какое наибольшее число единиц может быть в такой матрице?

*Решение.*  $n$  – наибольшее число единиц, которое может быть в матрице  $A$ .  $m = 36 - n$  – наименьшее число нулей, которое может быть в матрице  $A$ . Если  $m \leq 4$ , то в матрице есть две одинаковые строки, состоящие из единиц и матрица вырожденная.

Следовательно,  $36 - n \geq 5 \Rightarrow n \leq 31$ . В матрице

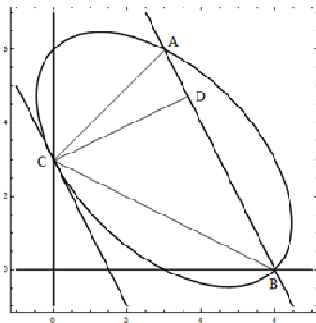
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

31 единица и  $\text{Det}A = -1$ .

*Ответ:* 31.

**Задача 4.** На эллипсе  $x^2 - 9x + xy + y^2 - 9y + 18 = 0$  (рис. 2) взяты точки  $A(3,6)$  и  $B(6,0)$ . Найти на эллипсе точку  $C$ , чтобы площадь треугольника  $ABC$  была наибольшей (рис. 2).

*Решение.*



**Рис. 2**

Площадь треугольника  $ABC$  будет максимальной, если высота, проведённая на  $AB$  имеет максимальную длину. Высота максимальна, если  $C$  –

точка, в которой касательная параллельна  $AB$ . Уравнение  $AB$ :  $y = -2x + 12$ . Поэтому уравнение касательной  $y = -2x + b$ . Подберём  $b$  так, чтобы эта прямая имела с эллипсом только одну общую точку. Подставив  $y$  в уравнение эллипса, получаем  $3x^2 + (9 - 3b)x + (b^2 - 9b + 18) = 0$ . Приравняв дискриминант нулю, находим корни  $b_1 = 3$  и  $b_2 = 15$ .

При  $b_1 = 3$  получаем  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = -2 \cdot 0 + 3 = 3 \Rightarrow C_1(0, 3)$ .

При  $b_2 = 15$  получаем  $x_2 = 6$ ,  $y_2 = -2 \cdot 6 + 15 = 3 \Rightarrow C_2(6, 3)$ .

Используя нормальное уравнение  $AB$ , находим, что наиболее удаленной является точка  $C_1$ ,  $h_{\max} = \frac{9}{\sqrt{5}}$ .

Ответ:  $C(0, 3)$ .

**Задача 5.** Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \sin\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \sin\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n} \right).$$

*Решение.* Предел является пределом интегральной суммы функции  $\sin x$  на отрезке  $[0, 1]$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \sin\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \sin\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n} \right) = \int_0^1 \sin x dx = 1 - \cos 1.$$

Ответ:  $1 - \cos 1$ .

**Задача 6.** Миша, Петя и Вася дежурные. Им нужно: а) подмести пол, б) вынести мусор, в) полить цветы, г) вытереть пыль, д) проветрить комнату, е) починить стул. Сколькими различными способами они могут распределить задания так, чтобы каждое задание делал кто-то один, но чтобы каждый что-нибудь делал?

*Решение.*  $3!S(6,3) = 3! \cdot 90 = 540$ .  $S(6,3)$  – число Стирлинга второго рода.

Ответ: 540.

**Задача 7.** Доказать, что  $\int_1^e \sqrt{\ln x} dx + \int_0^1 e^{x^2} dx = e$ .

*Решение:* Функции  $f(x) = e^{x^2}$  и  $g(x) = \sqrt{\ln x}$  взаимобратные и заданы на отрезках  $[0, 1]$  и  $[1, e]$  соответственно (рис. 3).

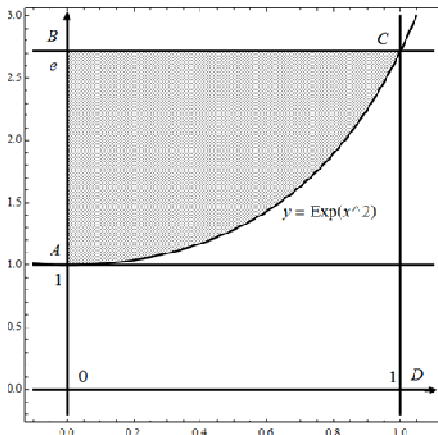


Рис. 3

$\int_1^e \sqrt{\ln x} dx$  равен площади фигуры  $ABC$ .  $\int_0^1 e^{x^2} dx$  равен площади фигуры  $AODC$ . А сумма площадей фигур  $ABC$  и  $AODC$  равна площади прямоугольника  $OBCD$ . Следовательно,  $\int_1^e \sqrt{\ln x} dx + \int_0^1 e^{x^2} dx = 1 \cdot e = e$ .

**Задача 8.** Найти частное решение дифференциального уравнения  $y'' - xy' - y = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ .

*Решение.*  $y'' - xy' - y = 0 \Rightarrow y'' = (xy)' \Rightarrow y' = xy + C_1 \Rightarrow y' - xy = C_1$ .

Последнее дифференциальное уравнение является линейным уравнением первого порядка, общее решение которого имеет вид

$$y = C_1 e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt + C_2 e^{\frac{x^2}{2}}.$$

$$y' = C_1 x e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt + C_1 e^{\frac{x^2}{2}} - C_2 x e^{\frac{x^2}{2}} = C_1 x e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt + C_1 + C_2 x e^{\frac{x^2}{2}}.$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1, \quad y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0. \quad y = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

*Ответ:*  $y = e^{\frac{x^2}{2}}$ .

**Задача 9.** Доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2}$  сходится, и найти его сумму.

*Решение.*  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$ .

Отсюда  $\forall x, y \in [0, +\infty] \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy} = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y$ .

Поэтому

$$\forall k \geq 1 \Rightarrow \frac{2}{k^2} = \frac{k+1-(k-1)}{1+(k^2-1)} \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{2}{k^2} = \operatorname{arctg}(k+1) - \operatorname{arctg}(k-1).$$

Следовательно,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \operatorname{arctg} \frac{2}{k^2} = \sum_{m=2}^{n+1} \operatorname{arctg} m - \sum_{m=0}^{n-1} \operatorname{arctg}(m) = \operatorname{arctg}(n+1) + \operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg} 1.$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg}(n+1) + \operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg} 1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2} = \frac{3\pi}{4}.$$

**Задача 10.** На конференцию приехало 18 учёных, из которых ровно 10 знают сногшибательную новость. Во время перерыва (кофе-брейка) все ученые разбиваются на случайные пары, и в каждой паре каждый, кто знает новость, рассказывает эту новость другому, если тот ещё не знал.

а) Найти вероятность того, что после кофе-брейка число учёных, знающих новость, будет равно 13.

б) Обозначим буквой  $X$  количество учёных, которые знают сногшибательную новость после кофе-брейка. Найти математическое ожидание  $X$ .

*Решение.* а) После кофе-брейка новость будут знать все, кто попал в пару, где есть хотя бы один «знайка» (тот, кто знал новость раньше). Поскольку эти ученые образуют целое число пар, их число чётно. Поэтому вероятность того, что их будет 13 человек, равна нулю.

б) Занумеруем каким-нибудь способом «незнаек» числами от 1 до 8 и введем случайные величины  $I_k$  по числу «незнаек».  $I_k = 1$ , если во время кофе-брейка «незнайка» с номером  $k$  стал «знайкой», и  $I_k = 0$ , если он так и не узнал новость. Очевидно,  $X = 10 + I_1 + I_2 + \dots + I_8$ . Распределения всех случайных величин  $I_k$  одинаковы:

$I_k$	0	1
$p$	7/17	10/17

поскольку в пару к любому «незнайке» может подсесть любой из оставшихся 17 ученых, и ровно 10 из них «знайки». Следовательно,  $M(X_k) = 10/17$ .

$$M(X) = M(10) + M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_8) = 10 + 8 \cdot \frac{10}{17} = \frac{250}{17} \cong 14,7.$$

$$\text{Ответ: а) } 0; \text{ б) } \frac{250}{17} \cong 14,7.$$

### Статистические данные полученных результатов

В олимпиаде принимали участие 146 человек из 14 вузов-команд. Участники были разделены на три категории: физико-математические специальности, технические специальности и курсанты военных вузов. Итоги подводились отдельно для студентов первого курса и студентов старших курсов. Средний балл по задачам для студентов различных категорий участников приведен в таблице 1.

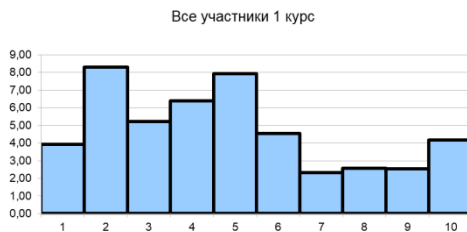
**Таблица 1. Средний балл по задачам для студентов различных категорий участников**

Средний балл по задачам	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Задача										
Все	4,78448276	6,8173913	4,67088608	4,5	6,68518519	4,49484536	4,96511628	3,93506494	2,46153846	2,55172414
1 курс	3,93877551	8,30645161	5,20689655	6,4	7,92857143	4,55172414	2,31034483	2,58064516	2,5483871	4,16666667
Старшие курсы	5,40298507	5,0754717	4,36	2,87804878	5,34615385	4,47058824	6,31578947	4,84782609	2,40425532	2,36538462
Курсанты	5,12727273	6,74074074	4,85714286	4,9	7,14516129	4,30769231	6,06976744	4,08333333	2,58974359	2,81818182
Технические спец.	4,775	6,67647059	4,15789474	4,16	6,68	4,41176471	4,17391304	4,17647059	2,33333333	1,61904762
Физ-мат. Спец.	4,26315789	7,58333333	5,0582353	3,81818182	5,33333333	5,13636364	3,88888889	3	2,33333333	3,84615385
Курсанты 1 курс	4,70833333	8,10714286	5,93333333	6,16666667	8,10344828	4,75	1,66666667	3	1,69230769	5
Курсанты ст. курсы	5,4516129	5,26923077	4,25925926	3,86363636	6,3030303	4,11111111	7,77419355	4,73333333	3,03846154	2,71428571
Тех. Спец. 1 курс	3,27777778	8,22222222	4,5	6,41666667	7,57142857	4,22222222	2,55555556	1,85714286	3,16666667	2,5
Тех. Спец. ст. курсы	6	4,9375	3,90909091	2,07692308	5,54545455	4,48	5,21428571	5,8	1,66666667	1,52631579
Физ-мат. Спец. 1 курс	3,5	8,66666667	4,33333333	7,2	7,92307692	4,625	3	2,16666667	3,16666667	5
Физ-мат. Спец. ст. курсы	4,61538462	5,77777778	5,45454545	1	1,125	5,42857143	4,6	3,83333333	1,5	3,5

Нагляднее средний балл по заданиям можно увидеть на диаграммах (рис. 4-9).



**Рис. 4**



**Рис. 5**

Все участники. Старшие курсы

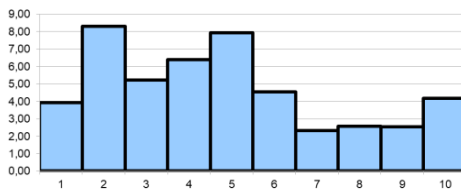


Рис. 6

По специальностям

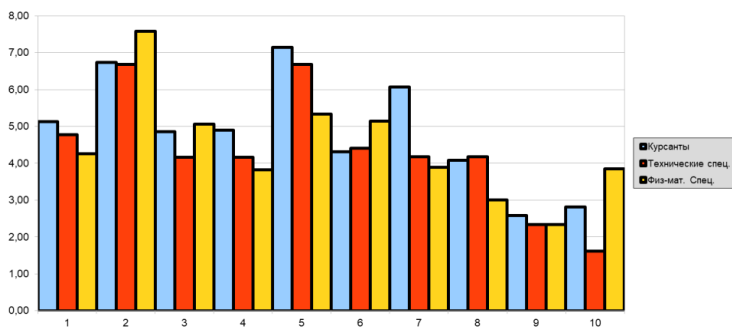


Рис. 7

По специальностям 1 курс

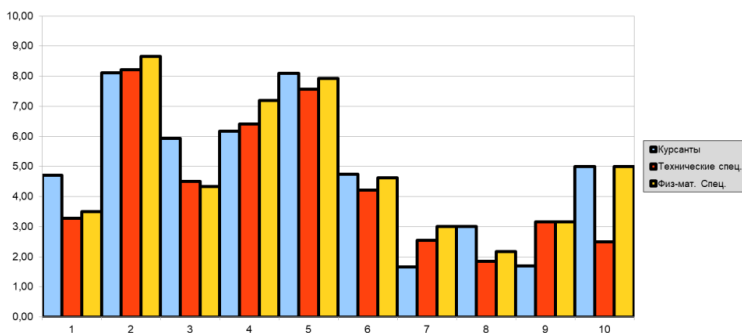


Рис. 6



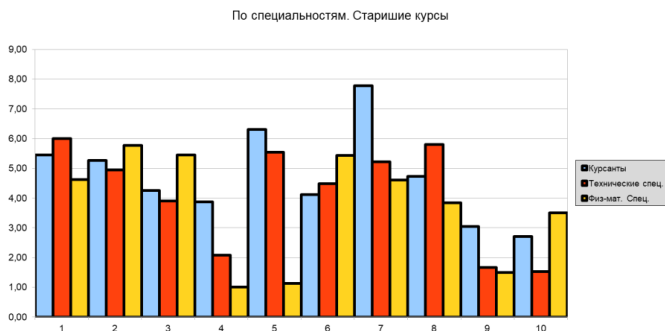


Рис. 9

Основные статистические характеристики приведены в таблице 2.

Таблица 2. Основные статистические характеристики

Номинации	Среднее	Дисперсия	Отклонение	Экссесс	Медиана	Мода	Асимметрия
Все	29,3013699	330,2809636	18,17363375	-0,20097305	27	24	0,583935509
1 курс	29,84375	262,4196429	16,19937168	1,01978636	26,5	24	0,901782777
2 курс	28,8780488	386,725685	19,66534223	-0,72309155	27	2	0,466196517
Курсанты	35,578125	305,6763393	17,48360201	-0,50507436	32	24	0,395193992
Технические спец.	25,1489362	402,8686401	20,07158788	0,08970637	21	2	0,798839281
Физ-мат. Спец.	25	147,5483871	12,1469497	0,14568267	23,5	19	0,824533442
Курсанты 1 курс	32,1724138	238,9334975	15,45747384	-0,03570569	31	10	0,675279857
Курсанты 2 курс	38,4	351,5411765	18,74943136	-0,6264215	36	36	0,148668391
Тех. Спец. 1 курс	28,5789474	353,4795322	18,80105136	3,15570221	25	24	1,357801671
Тех. Спец. 2 курс	22,8214286	436,8187831	20,90021012	-1,08972847	14	2	0,679950716
Физ-мат. Спец. 1 курс	28,2666667	204,352381	12,77681724	-0,81378302	25	19	0,623648994
Физ-мат. Спец. 2 курс	22,1176471	88,23529412	9,393364366	-0,01214189	20	20	0,418568525

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кащенко И.С.* О III межрегиональной студенческой олимпиаде в Ярославле / И.С. Кащенко, Ю.К. Олейникова, В.Ш. Ройтенберг // Актуальные проблемы преподавания математики в образовательной организации высшего образования: материалы очно-заочной науч.-метод. конф. с междунар. участием. Кострома: Изд-во «Военная академия радиационной, химической и биологической защиты им. Маршала Советского Союза С.К. Тимошенко», 2018. С. 21–28.
2. *Васильева А.В.* Задачи XVI Открытой областной студенческой олимпиады Ярославской области по математике / А.В. Васильева, М.А. Башкин, А.И. Бурцев, Л.В. Березина // Математика и естественные науки. Теория и практика: Мевуз. сб. науч. тр. Вып. 12. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2017. С. 115–123.

УДК 519.725.2

**А. Н. Жаров<sup>1</sup>, И. Г. Жарова<sup>1</sup>, С. В. Овчинников<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Ярославский государственный технический университет,  
<sup>2</sup>Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны  
Россия, г. Ярославль, e-mail: zharovan@ystu.ru, zharovaig@ystu.ru,  
osv70@yandex.ru

## **О ПРЕПОДАВАНИИ ТЕМЫ: КОДЫ ХЭММИНГА**

*Рассмотрены особенности изложения темы: коды Хэмминга. Указано, что для освоения данной темы слушатели должны знать основы комбинаторики, математической логики и двоичную систему счисления.*

**Ключевые слова:** коды, коды Хэмминга, помехоустойчивое кодирование.

**A. N. Zharov<sup>1</sup>, I. G. Zharova<sup>1</sup>, S. V. Ovchinnikov<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Yaroslavl State Technical University,  
<sup>2</sup>Yaroslavl Higher Military School of Air Defense  
Russia, Yaroslavl, e-mail: zharovan@ystu.ru, zharovaig@ystu.ru,  
osv70@yandex.ru

## **ABOUT THE TEACHING OF THE THEME: HAMMING CODES**

*It is examined the features of studying of the topic: hamming codes. It is indicated that in order to master this topic, students should know the basics of combinatorics, mathematical logic and the binary number system.*

**Keywords:** codes, hamming codes, noise-immune coding.

В работах [1, 2] был предложен подход к изложению материала, посвященного циклическим кодам и синтезу кодеров циклических кодов. Циклические коды – это один из видов помехоустойчивых кодов, т.е. кодов которые обнаруживают и исправляют ошибки, наведенные помехами или наводками при прохождении сигналов по каналу связи. Ещё одним видом помехоустойчивых кодов являются коды Хэмминга.

Рассмотрим информационное сообщение  $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m$ , где  $\alpha_i \in \{0,1\}$ . Добавим к этому сообщению  $k$  проверочных символов. Закодируем информационное сообщение длины  $m$  кодом Хэмминга  $\beta_1\beta_2 \dots \beta_m\beta_{m+1} \dots \beta_{m+k}$  длины  $n = m + k$ . Предположим, что при передаче по каналу связи кода Хэмминга ошибка может произойти только в одном символе. Следовательно, на выходе канала связи могут быть возможны

следующие сигналы:  $\beta_1\beta_2\beta_3 \cdots \beta_n$ ,  $\beta'_1\beta_2\beta_3 \cdots \beta_n$ ,  $\beta_1\beta'_2\beta_3 \cdots \beta_n$ ,  $\beta_1\beta_2\beta'_3 \cdots \beta_n$ ,  $\beta_1\beta_2\beta_3 \cdots \beta'_n$ , где штрихом отмечены символы, в которых произошла ошибка.

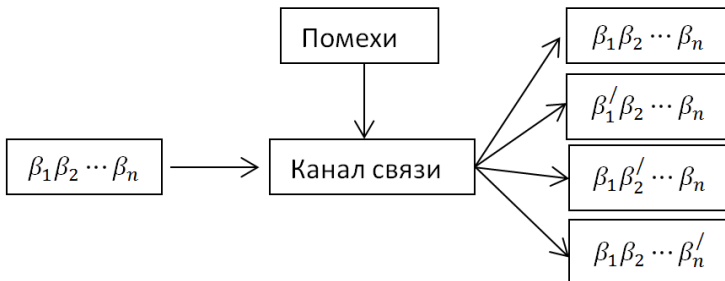


Рис. 1. Процесс передачи кода Хэмминга по каналу связи

Таким образом, количество возможных кодов на выходе из канала связи равно  $n + 1$ . Чтобы можно было обнаружить одну ошибку, нужно чтобы количество проверочных символов  $2^k$  превосходило  $n + 1$ . Следовательно, должно выполняться условие

$$2^k \geq n + 1 \text{ или } 2^{n-m} \geq n + 1 \text{ или } 2^m \leq \frac{2^n}{(n+1)}. \quad (1)$$

Из соотношения (1) можно определить длину кода Хэмминга. Например, при  $m = 1$ :  $2^1 = 2 \leq \frac{2^3}{3+1} = \frac{8}{4} = 2$ , значит  $n = 3$ ,

при  $m = 2$ :  $2^2 = 4 \leq \frac{2^5}{5+1} = \frac{32}{6} = 5\frac{1}{3}$ , значит  $n = 5$ .

Количество информационных символов  $m$ , минимальную длину кода Хэмминга  $n$  и количество проверочных символов  $k$  для кода Хэмминга можно видеть в таблице 1.

Таблица 1. Соответствие между количеством информационных символов  $m$ , минимальной длиной кода Хэмминга  $n$  и количеством проверочных символов  $k$

$m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n$	3	5	6	7	9	10	11	12	13	14	15
$k$	2	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4

Для того чтобы выделить информационные и проверочные символы, рассмотрим представление номеров символов кода Хэмминга двоичными числами. Данное представление можно видеть в таблице 2.

**Таблица 2. Соответствие между символом кода Хэмминга и двоичным числом**

Символ кода Хэмминга	Номер символа	$V_3$	$V_2$	$V_1$	$V_0$
$\beta_1$	1	0	0	0	1
$\beta_2$	2	0	0	1	0
$\beta_3$	3	0	0	1	1
$\beta_4$	4	0	1	0	0
$\beta_5$	5	0	1	0	1
$\beta_6$	6	0	1	1	0
$\beta_7$	7	0	1	1	1
$\beta_8$	8	1	0	0	0
$\beta_9$	9	1	0	0	1
$\beta_{10}$	10	1	0	1	0
$\beta_{11}$	11	1	0	1	1
$\beta_{12}$	12	1	1	0	0
$\beta_{13}$	13	1	1	0	1
$\beta_{14}$	14	1	1	1	0
$\beta_{15}$	15	1	1	1	1

Выделим последовательности чисел:

- 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 – числа, в двоичной записи которых нулевой разряд содержит 1;
- 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15 – числа, в двоичной записи которых первый разряд содержит 1;
- 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15 – числа, в двоичной записи которых второй разряд содержит 1;
- 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 – числа, в двоичной записи которых третий разряд содержит 1.

На основе данных числовых последовательностей сформируем последовательности символов кода Хэмминга:

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \{\beta_1; \beta_3; \beta_5; \beta_7; \beta_9; \beta_{11}; \beta_{13}; \beta_{15}\}; \\
 V_1 &= \{\beta_2; \beta_3; \beta_6; \beta_7; \beta_{10}; \beta_{11}; \beta_{14}; \beta_{15}\}; \\
 V_2 &= \{\beta_4; \beta_5; \beta_6; \beta_7; \beta_{12}; \beta_{13}; \beta_{14}; \beta_{15}\}; \\
 V_3 &= \{\beta_8; \beta_9; \beta_{10}; \beta_{11}; \beta_{12}; \beta_{13}; \beta_{14}; \beta_{15}\}.
 \end{aligned}$$

Первые символы в каждой последовательности будут проверочными  $\beta_1; \beta_2; \beta_4; \beta_8$ . Таким образом, номер проверочного символа – это целая степень числа 2.

Оставшиеся символы из последовательностей  $V_0, V_1, V_2, V_3$  будут информационными  $\beta_3; \beta_5; \beta_6; \beta_7; \beta_9; \beta_{10}; \beta_{11}; \beta_{12}; \beta_{13}; \beta_{14}; \beta_{15}$ .

Информационным символам присвоим следующие значения:

$$\beta_3 = \alpha_1; \beta_5 = \alpha_2; \beta_6 = \alpha_3; \beta_7 = \alpha_4; \beta_9 = \alpha_5;$$

$$\beta_{10} = \alpha_6; \beta_{11} = \alpha_7; \beta_{12} = \alpha_8; \beta_{13} = \alpha_9; \beta_{14} = \alpha_{10}; \beta_{15} = \alpha_{11}. \quad (2)$$

Проверочные символы сформируем на основе последовательностей  $V_0, V_1, V_2, V_3$ :

$$\beta_1 = \beta_3 \oplus \beta_5 \oplus \beta_7 \oplus \beta_9 \oplus \beta_{11} \oplus \beta_{13} \oplus \beta_{15},$$

$$\beta_2 = \beta_3 \oplus \beta_6 \oplus \beta_7 \oplus \beta_{10} \oplus \beta_{11} \oplus \beta_{14} \oplus \beta_{15},$$

$$\beta_4 = \beta_5 \oplus \beta_6 \oplus \beta_7 \oplus \beta_{12} \oplus \beta_{13} \oplus \beta_{14} \oplus \beta_{15},$$

$$\beta_8 = \beta_9 \oplus \beta_{10} \oplus \beta_{11} \oplus \beta_{12} \oplus \beta_{13} \oplus \beta_{14} \oplus \beta_{15}, \quad (3)$$

где  $\oplus$  - операция сложения по модулю 2.

**Пример 1.** В качестве примера построим код Хэмминга для информационного сообщения 1011. В данном случае

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 1.$$

Из соотношений (2) найдем

$$\beta_3 = \alpha_1 = 1; \beta_5 = \alpha_2 = 0; \beta_6 = \alpha_3 = 1; \beta_7 = \alpha_4 = 1.$$

Из соотношений (3) найдем

$$\beta_1 = \beta_3 \oplus \beta_5 \oplus \beta_7 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0,$$

$$\beta_2 = \beta_3 \oplus \beta_6 \oplus \beta_7 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1,$$

$$\beta_4 = \beta_5 \oplus \beta_6 \oplus \beta_7 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0.$$

Код Хэмминга примет вид  $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\beta_6\beta_7 = 0110011$ .

Рассмотрим обнаружение ошибки в кодах Хэмминга. Пусть на выходе канала связи принято сообщение  $\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2 \dots \tilde{\beta}_n$ . На основе последовательностей  $V_0, V_1, V_2, V_3$  сформируем синдромы ошибки

$$S_0 = \tilde{\beta}_1 \oplus \tilde{\beta}_3 \oplus \tilde{\beta}_5 \oplus \tilde{\beta}_7 \oplus \tilde{\beta}_9 \oplus \tilde{\beta}_{11} \oplus \tilde{\beta}_{13} \oplus \tilde{\beta}_{15},$$

$$S_1 = \tilde{\beta}_2 \oplus \tilde{\beta}_3 \oplus \tilde{\beta}_6 \oplus \tilde{\beta}_7 \oplus \tilde{\beta}_{10} \oplus \tilde{\beta}_{11} \oplus \tilde{\beta}_{14} \oplus \tilde{\beta}_{15},$$

$$S_2 = \tilde{\beta}_4 \oplus \tilde{\beta}_5 \oplus \tilde{\beta}_6 \oplus \tilde{\beta}_7 \oplus \tilde{\beta}_{12} \oplus \tilde{\beta}_{13} \oplus \tilde{\beta}_{14} \oplus \tilde{\beta}_{15},$$

$$S_3 = \tilde{\beta}_8 \oplus \tilde{\beta}_9 \oplus \tilde{\beta}_{10} \oplus \tilde{\beta}_{11} \oplus \tilde{\beta}_{12} \oplus \tilde{\beta}_{13} \oplus \tilde{\beta}_{14} \oplus \tilde{\beta}_{15}. \quad (4)$$

Двоичным синдромом ошибки является число  $S_3S_2S_1S_0$ .

Анализируя таблицу 3, в которой представлено соответствие между символом кода Хэмминга, искаженным при передаче по каналу связи и синдромом ошибки, можно видеть что, если синдром ошибки  $S_3S_2S_1S_0$  записать в виде десятичного числа, то это число будет указывать на номер символа, который исказился при передаче по каналу связи.

Декодирование кода Хэмминга состоит в выделении информационных символов.

Рассмотрим обнаружение и исправление ошибки в коде Хэмминга.

**Таблица 3. Соответствие между искаженным символом кода Хэмминга и синдромом ошибки**

Искаженный символ кода Хэмминга	Синдром ошибки
$\tilde{\beta}_1$	0001
$\tilde{\beta}_2$	0010
$\tilde{\beta}_3$	0011
$\tilde{\beta}_4$	0100
$\tilde{\beta}_5$	0101
$\tilde{\beta}_6$	0110
$\tilde{\beta}_7$	0111
$\tilde{\beta}_8$	1000
$\tilde{\beta}_9$	1001
$\tilde{\beta}_{10}$	1010
$\tilde{\beta}_{11}$	1011
$\tilde{\beta}_{12}$	1100
$\tilde{\beta}_{13}$	1101
$\tilde{\beta}_{14}$	1110
$\tilde{\beta}_{15}$	1111

**Пример 2.** Рассмотрим код Хэмминга, полученный в примере 1. Сделаем ошибку в 4 символе. То есть будем считать, что на выходе канала связи получено сообщение  $\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2\tilde{\beta}_3\tilde{\beta}_4\tilde{\beta}_5\tilde{\beta}_6\tilde{\beta}_7 = 0111011$ . Согласно соотношениям (4), найдем синдромы ошибки

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0, \\ S_1 &= 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0, \\ S_2 &= 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1. \end{aligned}$$

Синдром ошибки  $S_2S_1S_0 = 100$  соответствует числу 4. Исправим четвертый символ кода 0110011. Для декодирования кода Хэмминга исключим проверочные символы, которые располагаются на 1, 2, 4 местах. Получим информационное сообщение 1011.

Из изложенного материала видно, что коды Хэмминга являются наиболее простыми помехоустойчивыми кодами. Для освоения данной темы слушателям достаточно знать основы комбинаторики, математической логики и двоичную систему счисления.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жаров А.Н.* О преподавании темы: циклические коды / А.Н. Жаров, С.В. Овчинников, А.Н. Хожайнов // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 12. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2017. С. 135-143.
2. *Жаров А.Н.* О преподавании темы: синтез кодеров циклических кодов / А.Н. Жаров, Д.Г. Митюшов, И.Г. Жарова // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 13. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2018. С. 92-96.

УДК 371.315

**В. Л. Зудин**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, *e-mail*: [zudinvl@ystu.ru](mailto:zudinvl@ystu.ru)

## **ОРГАНИЗАЦИЯ ИЗУЧЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ ДИСЦИПЛИНЫ В ВУЗЕ**

*В статье рассмотрены некоторые методические приемы, обеспечивающие повышение объективности и качества обучения студентов технического вуза при значительной экономии учебного времени.*

**Ключевые слова:** учебный процесс, лекция, практическое занятие, лабораторная работа, расчетно-графическая работа, эффективность, качество.

**V. L. Zudin**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, *e-mail*: [zudinvl@ystu.ru](mailto:zudinvl@ystu.ru)

## **THE ORGANIZATION OF THE STUDY OF TECHNICAL DISCIPLINE IN THE UNIVERSITY**

*The article deals with some methodological techniques to improve the objectivity and quality of training of students of technical University with a significant saving of training time.*

**Keywords:** educational process, lecture, practical class, laboratory work, calculation and graphic work, efficiency, quality.

В связи со значительным уменьшением объемов и содержания изучаемых дисциплин в полный рост встает задача рационального использования учебного времени студентов и преподавателя. Эта задача может быть решена различными способами: существенным сжатием изучаемого учебного материала; интенсификацией учебного процесса за счет рационального использования современных технических средств; создания полноценного учебно-методического обеспечения; кардинального изменения методики преподавания дисциплины; правильной организации самостоятельной работы студентов и текущего контроля их учебных достижений, внедрения системы рейтинга индивидуальных учебных достижений студентов и т.п.

Первый из перечисленных способов чаще всего приводит к снижению качества обучения, поскольку предполагает либо исключение из кур-

са отдельных (иногда немаловажных) разделов, либо существенное упращение содержания дисциплины. Потому он неприемлем с точки зрения реализации требований государственных и профессиональных стандартов для соответствующего направления и профиля подготовки.

В большинстве технических дисциплин максимальный набор видов аудиторных занятий и форм контроля представлен лекционными, практическими и лабораторными занятиями, выполнением курсовой работы (проекта) и/или расчетно-графической работы, экзаменом (одним или несколькими) и/или зачетом (зачетами, в том числе дифференцированными).

Отметим, что курсовое проектирование является отдельной формой контроля и его результаты оцениваются индивидуально, в отдельной зачетной ведомости, поэтому здесь вопросы организации курсового проектирования не обсуждаются.

Далее рассматриваются целесообразные изменения в рамках предложенных способов рационализации учебного процесса, которые могут быть использованы по отношению к некоторой условной технической дисциплине применительно к различным видам аудиторных занятий и формам контроля.

Общим требованием, в значительной мере обеспечивающим повышение качества обучения в вузе, является наличие учебно-методических материалов по всем видам занятий и формам контроля, предусмотренным учебным планом для конкретной дисциплины. Именно эти материалы (учебные и учебно-методические пособия, сборники задач, иллюстративные тематические материалы, методические указания и т.п.) составляют опору, которая дает возможность студенту не "заблудиться" в обилии информации по дисциплине, конкретизируют требования к разным формам контроля, определяют круг решаемых задач, ограниченный содержанием рабочей программой дисциплины.

Далее рассматриваются различные методические приемы, обеспечивающие повышение качества обучения в различных видах аудиторных учебных занятий.

**1. Лекции.** Несмотря на различные нововведения, лекция пока ещё остается основной формой предъявления новой учебной информации студентам. Чтобы сделать лекцию более эффективной, целесообразно выполнить следующие организационно-методические мероприятия.

а) Разработка и опубликование **авторского курса** в виде учебного пособия, наиболее полно отражающего содержание изучаемой дисциплины, включающего вывод необходимых формул, представление рисунков, вспомогательных схем, графиков, помогающих максимально полно освоить изучаемую дисциплину;



Иначе говоря, содержание такого пособия должно быть адресовано наиболее вдумчивым, способным студентам, "отличникам", действительно желающим глубоко освоить материал курса. При этом студенту должна быть предоставлена возможность использовать авторский курс в бумажной и/или электронной форме.

б) Наличие авторского курса позволяет отказаться и от ведения текущих записей студентами во время лекции. Действительно, если пособие подготовлено самим лектором, то теряется смысл в переписывании студентами напечатанного материала. Только одно это обстоятельство позволяет существенно сократить необоснованные затраты лекционного времени и сосредоточить внимание студентов непосредственно на изучаемом материале.

Если лектор предпочитает использовать традиционный стиль чтения лекции, а изучаемая дисциплина требует использования большого количества рисунков, схем, сложных диаграмм, можно предложить "компромиссный" вариант, когда готовится и публикуется в достаточном количестве только иллюстративный материал по дисциплине. Такой вариант также обеспечивает значительную экономию времени, как правило, при высоком качестве иллюстраций, однако требует значительных затрат на подготовку и тиражирование необходимых материалов.

в) Чтение лекций в **специализированной аудитории**, оснащенной компьютером, видеопроектором с экраном, документ-камерой (при необходимости), системой затемнения. Это позволит существенно сократить учебное время за счет отказа от ручного рисования сложных схем, диаграмм, формул;

г) Чтение лекций в расчете на "среднего" студента, предполагающего получить на экзамене оценку не выше "удовлетворительно". Главная задача заключается в том, чтобы студент понял сущность изучаемого материала, имел представление об объекте изучения, его конструкции, принципе действия и сферах применения объекта.

При этом непосредственно на лекции рассматриваются лишь основные положения соответствующих разделов, формулы приводятся без их вывода, а представляются только исходные данные для вывода и окончательный результат. Значительное внимание уделяется изобразительным материалам разного вида, помогающим студенту понять самые главные, принципиально важные сведения об объекте изучения. Такой подход обеспечивает создание дополнительных резервов времени для расширения круга рассматриваемых вопросов, хотя и на минимальном, описательном уровне.

Студенты, рассчитывающие получить на экзамене более высокие оценки, обязательно должны будут обратиться к материалам учебного по-

собия по дисциплине для более подробного самостоятельного изучения материала курса.

**2. Практические** (в том числе семинарские) **занятия**. Как правило, они представляют собой форму организации учебного процесса с группой студентов постоянного состава под руководством преподавателя, ориентированную на закрепление изученного теоретического материала, его более глубокое усвоение и формирование умений применять теоретические знания для прикладных целей.

Особенностями практических занятий являются высокий процент самостоятельной работы студентов (до 70% времени), проведение преподавателем предварительного инструктажа (например, в форме решения типовых задач), а также постоянный контроль самостоятельной работы каждого студента, анализ и оценка выполненных работ.

На практических занятиях могут решаться и задания, включенные в состав расчетно-графических работ (если таковые предусмотрены учебным планом). Часть времени практического занятия иногда может быть отведена для проведения контрольных мероприятий (например, коллоквиума, тестирования, письменной контрольной работы и т.п.), в том числе и по теоретическому (лекционному) материалу.

Необходимые подготовительные организационно-методические мероприятия заключаются в следующем.

а) Наличие сборника задач и упражнений (авторского или рекомендуемого рабочей программой) с необходимым теоретическим обоснованием по содержанию каждого практического занятия по дисциплине. Примеры решения типовых задач должны содержать подробное описание всех шагов, или универсальных учебных действий, которые должен выполнить студент при решении задачи. Отметим, что термин "типовая задача" не означает, что решение других задач по данной теме сводится просто к подстановке в алгоритм решения других чисел. На основе типового алгоритма может быть определено поведение объекта при некоторых частных условиях (например, значение выходного напряжения индуктивного датчика при нулевом или бесконечно большом зазоре между сердечником и якорем, расчет и построение характеристик датчика при определенном наборе влияющих величин, выявление диапазона линейности датчика, вычисление любой из величин, входящей в основную формулу, и т.п.).

б) Самостоятельное решение студентами типовых задач на практических занятиях.

в) Выдача индивидуальных домашних заданий, их проверка и оценивание на следующем занятии.

**3. Лабораторные занятия**. Целями лабораторного практикума являются, как правило, экспериментальная проверка и подтверждение суще-

ственных теоретических положений, формирование навыков исследовательской работы. К необходимым мероприятиям, обеспечивающим эффективное усвоение учебного материала, можно отнести следующие.

а) Подготовка учебно-методического пособия по лабораторному практикуму, состоящего из теоретического материала по темам лабораторного практикума и методических указаний по каждой лабораторной работе. Такое пособие может объединять теоретический материал нескольких лабораторных работ со смежной или близкой тематикой.

б) Теоретические материалы должны четко соответствовать тематике работы и являться основой для подготовки к отчету по работе. Основой этого материала является адаптированное содержание лекционного курса, которое может быть дополнено сведениями практического характера (например, описанием работы приборов и оборудования, применяемых при выполнении работ, необходимыми табличными данными, графиками и т.п.).

в) Методика выполнения работы определяется целью и содержанием каждой лабораторной работы, и должна быть составлена максимально подробно и четко в расчете на самого слабого студента. Такой подход избавляет преподавателя от необходимости дополнительных устных разъяснений.

Для устранения дублирования (списывания) студентами письменных отчетов каждая лабораторная работа должна содержать несколько (минимум 7-8) вариантов исходных данных (например, напряжения питания прибора, каких-либо других легко изменяемых величин).

г) На основе теоретических данных и методики выполнения лабораторных работ преподаватель разрабатывает тематику вопросов или тестовые задания для устного (или тестового) контроля учебных достижений студентов.

Тематика вопросов должна быть приведена после изложения методики выполнения каждой работы. При этом следует приводить не сами контрольные вопросы, а именно их достаточно подробную тематику, поскольку конкретные вопросы, непосредственно задаваемые студенту в ходе контроля, могут служить поводом для создания студентами разного рода "шпаргалок".

д) Объем каждой лабораторной работы должен быть таким, чтобы любая лабораторная работа могла быть уверенно выполнена любой группой студентов не более чем за три академических часа (при четырехчасовых занятиях). Четвертый час может быть использован для приведения в порядок полученных экспериментальных данных, проведения основных расчетов и предъявления их преподавателю, а также для представления письменного отчета по предыдущей работе и беседы с преподавателем по её результатам либо для проведения тестирования.

е) При общем числе студентов больше 16 группа делится на две подгруппы; если студентов в группе больше 32, то организуются три подгруппы, в каждой из которых должно быть примерно равное (по возможности чётное) количество студентов.

ж) Студенты выполняют каждую лабораторную бригадным методом, причем состав каждой бригады определяется самими студентами на первом лабораторном занятии, и не должен изменяться до полного окончания лабораторного практикума. Бригада должна состоять из двух человек; при нечетном количестве студентов в подгруппе одна бригада может состоять из трех студентов. Переходы из бригады в бригаду, из одной подгруппы в другую, должны быть запрещены, поскольку это сильно осложняет организацию выполнения работ (особенно в конце семестра).

и) Желательно заранее сообщать студентам, какую работу они будут выполнять на следующем занятии, с тем чтобы они могли подготовиться к её выполнению и осознанно подходить к предстоящему исследовательскому процессу.

к) По окончании каждой лабораторной студенты бригады составляют **письменный отчет** (один на бригаду), который содержит титульный лист с наименованием работы и её шифром (по СТО ЯГТУ 702-2005), цель работы, номер варианта (при наличии), краткие технические характеристики используемого оборудования и средств измерения, результаты проведенных экспериментов в виде таблиц и графиков, а также выводы по всем разделам выполненной работы. Теоретическая и описательная часть в отчет не включается.

Особое внимание следует уделить выводам по результатам выполненной работы, их правильности и обоснованию.

Письменный отчет по каждой лабораторной работе составляется в виде отдельного документа и является обязательным элементом для получения зачета по данной работе. Отчет сдается преподавателю в печатном виде (формат листа – А4, шрифт Times New Roman, кегль 14, прямой) через один интервал.

л) Второй обязательный элемент зачета по работе – положительная оценка, получаемая по итогам **индивидуального** устного, письменного или тестового контроля каждого студента.

Наиболее продуктивной и оперативной формой контроля является компьютерное тестирование. Для организации тестового контроля непосредственно в лаборатории должно быть установлено, как минимум, два персональных компьютера с соответствующим программным обеспечением. Кроме того, эти компьютеры могут быть использованы для проведения необходимых расчетов и построения графиков при предварительном оформлении отчетов, а также для текущего тестирования при сдаче индивидуальных отчетов по лабораторным работам.

Таким образом, лабораторная работа считается зачтённой, если преподавателем принят по ней письменный отчет бригады, а каждый студент, выполнявший работу в составе бригады, успешно прошёл индивидуальный (устный, письменный или тестовый) контроль по материалу данной работы.

**4. Расчетно-графическая работа (РГР).** РГР (возможные варианты наименований – расчетное задание, расчетно-графическое задание и т.п.) представляет собой форму контроля учебных достижений студента, содержащую одно или несколько заданий (задач) по разделам изучаемой дисциплины и направленную на закрепление необходимых практических навыков по дисциплине. Для дисциплин гуманитарного профиля вместо РГР в учебный план может быть включен реферат.

Задание на выполнение РГР выдается в начале семестра с соответствующими пояснениями преподавателя (содержание РГР, особенности выполнения, содержание и срок защиты, критерии оценки и т.п.).

Оформление РГР выполняется аналогично отчету по лабораторной работе: титульный лист (по СТО ЯГТУ 702-2005), содержание, основная часть (условия и решения задач). Все формулы и расчетные соотношения выполняются в подробной записи по образцу, приведенному ниже. Формула записывается сначала в общем виде, затем с подстановкой числовых значений, и далее - в виде окончательного числа.

Например, для заданных (или ранее вычисленных) значений

$a = 7,2$  см;  $b = 5,9$  см;  $c = 2$  см следует записать

$$y = a + \sqrt{b^2 - c^2} = 7,2 + \sqrt{5,9^2 - 2^2} = 12,75 \text{ см.}$$

В конце семестра РГР сдается студентом на однократную проверку преподавателю, который указывает на ошибочные решения, и ставит отметку о просмотре, предлагая явиться на защиту с исправленным вариантом. Защита РГР проводится, как правило, на последней неделе теоретического обучения.

**5. Самостоятельная работа студента (СРС)** – вид учебной, учебно-исследовательской и научно-исследовательской деятельности, выполняемый учащимся без непосредственного контакта с преподавателем или управляемый преподавателем опосредованно через специальные учебные материалы. Самостоятельность – одно из ведущих качеств личности, выражающееся в умении ставить перед собой определенные цели, добиваться их достижения собственными силами. Она предполагает ответственное отношение человека к своим поступкам, способность действовать сознательно, принимать творческие решения.

СРС – обязательное звено процесса обучения, предусматривающее прежде всего индивидуальную работу учащихся в соответствии с установ-

кой преподавателя или учебника, программы обучения. СРС должна быть полностью обеспечена необходимыми учебно-методическими материалами.

СРС выполняется во время *плановых* аудиторных занятий (практических и лабораторных занятий, контрольных работ, деловых игр и т.п.) при методическом руководстве преподавателя или *во внеучебное время* без непосредственного участия преподавателя (выполнение домашних заданий, расчетно-графических и курсовых работ (проектов), освоение теоретического (лекционного) материала дисциплины, изучение дополнительных материалов, дистанционное и электронное обучение, освоение необходимого программного обеспечения, подготовка к лабораторным, практическим занятиям, контрольным работам, тестированию, экзаменам, зачетам, выполнение выпускной квалификационной работы и т.п.

Организация и использование методик дистанционного и сетевого электронного обучения не входит в задачи настоящей статьи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голкина В.А.* Организация обучения и контроля учебных достижений студентов по дисциплине: учебное пособие / В.А. Голкина, В.Л. Зудин, А.Г. Маланов. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. 214 с.
2. Проектирование типовых задач применения универсальных учебных действий (на материале естественно-научного и технологического образования): методические рекомендации для педагогических работников [Электронный ресурс] / А.В. Ильина, Ю.Г. Маковецкая, Л.Б. Хуснутдинова. Челябинск, ЧИППКРО, 2017. 52 с. Режим доступа: <https://docplayer.ru/>

УДК 51

**Н. М. Гулевич, В. О. Кузнецов**

Государственный университет морского и речного флота  
им. адмирала С.О. Макарова,  
Россия, г. Санкт-Петербург, *e-mail: gulevich.nikolay@gmail.com,*  
*kvo\_kuz@mail.ru*

## О ПРЕДЕЛЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

*Приведено содержание олимпиадного занятия со студентами первого курса по теме «Предел последовательности».*

**Ключевые слова:** *предел последовательности, эквивалентные последовательности, бесконечно малая последовательность, теорема о сжатой переменной.*

N. M. Gulevich, V. O. Kuznetsov

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping  
Russia, Saint Petersburg, e-mail: kvo\_kuz@mail.ru

## ON THE LIMIT OF SEQUENCE

The content of olympiad lesson for the first year students on the topic limit of sequence, is presented.

**Keywords:** limit of sequence, equivalent sequences, infinitesimal sequence, squeeze theorem.

Теоретический материал занятия составляют следующие теоремы (см., например, [1]):

**Теорема 1** (К. Вейерштрасс; о пределе монотонной последовательности). *Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

**Теорема 2** (принцип сжатой переменной). *Если  $x_n \leq y_n \leq z_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $x_n \rightarrow a$ ,  $z_n \rightarrow a$ , то  $y_n \rightarrow a$ .*

**Теорема 3** (о предельном переходе в неравенстве). *Если  $x_n \leq y_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow b$ , то  $a \leq b$ .*

**Теорема 4** (О. Штольц; правило Лопитала для последовательностей). *Если  $\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \rightarrow a$ , где  $y_{n+1} > y_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $y_n \rightarrow \infty$ , то  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow a$ .*

**Теорема 5** (о структуре сходящейся последовательности).

$$x_n \rightarrow a \Leftrightarrow x_n - a \rightarrow 0.$$

**Определение 1** (бесконечно малой последовательности).

$$x_n \rightarrow 0 \stackrel{Def}{\Leftrightarrow} \{ \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \Rightarrow |x_n| < \varepsilon \}.$$

Поскольку  $||(|x|)| = |x|$ , то справедливо

**Следствие 1.**  $x_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |x_n| \rightarrow 0$ .

**Замечание.** Поскольку  $y = |x|$  — непрерывная функция, то  $x_n \rightarrow a \Rightarrow |x_n| \rightarrow |a|$ . Однако, если  $a \neq 0$ , то  $|x_n| \rightarrow |a| \not\Rightarrow x_n \rightarrow a$ .

**Пример.**  $x_n = (-1)^n$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 1$ , но  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  не существует.

**Определение 2** (эквивалентных последовательностей).

$$x_n : y_n \stackrel{Def}{\Leftrightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1.$$

**Задача 1.** Последовательность  $x_n$  такая, что  $|x_{n+1}| \leq \alpha |x_n|$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , где  $\alpha \in (0, 1)$ . Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

**Решение 1.** Имеем  $|x_2| \leq \alpha |x_1|$ ,  $|x_3| \leq \alpha |x_2| \leq \alpha^2 |x_1|$ . Применяя метод математической индукции, получаем, что  $0 \leq |x_n| \leq \alpha^{n-1} |x_1|$ . Поскольку  $\alpha^{n-1} |x_1| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , то по теореме 2,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$ , и, в силу следствия 1,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

**Решение 2.** Имеем  $0 \leq |x_{n+1}| \leq \alpha |x_n| \leq |x_n| \leq |x_1|$ . По теореме 1 существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = a$ . Переходя в неравенстве  $0 \leq |x_{n+1}| \leq \alpha |x_n|$  к пределу, получаем  $0 \leq a \leq \alpha a \Rightarrow a = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

**Задача 2.** Последовательность  $x_n$  такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda$ , где  $\lambda \in [0, 1)$ . Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

**Решение.** По определению предела последовательности, для  $\varepsilon = (1 - \lambda)/2$  найдется такое  $N \in \mathbb{N}$ , что  $\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - \lambda \right| \leq \varepsilon \Rightarrow |x_{n+1}| \leq (\lambda + \varepsilon) |x_n|$  для любого  $n > N$ . Поскольку  $\lambda + \varepsilon = (1 + \lambda)/2 < 1$ , то, рассуждая так же, как в задаче 1, получим  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

**Задача 3.** Доказать, что последовательность  $x_n = \sqrt[n]{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}$  имеет предел и найти его.

**Решение 1.** Последовательность  $x_n$  возрастает, поскольку  $x_{n+1} = \sqrt[n+1]{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} > \sqrt[n]{6 + \dots + \sqrt{6 + 0}} = x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , и ограничена:  $x_1 \leq x_n < \sqrt[n]{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{9}}} = 3$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . По теореме 1 существует

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , и, так как  $\sqrt{6} = x_1 \leq x_n < 3$ , по теореме 3,  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [\sqrt{6}, 3]$ .

Функция  $f(x) = \sqrt{6+x}$  непрерывна на  $[-6, \infty)$ . Переходя к пределу в ра-



венстве  $x_{n+1} = f(x_n)$ , <sup>1)</sup> получим

$$a = \sqrt{6+a} \Rightarrow a^2 - a - 6 = (a+2)(a-3) = 0 \stackrel{a \geq 0}{\Rightarrow} a = 3.$$

**Решение 2.** Очевидно,  $x_n \geq 0$ . Предположим, что предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  существует (и конечен). По теореме 3  $a \geq 0$ . Переходя к пределу в рекуррентной формуле  $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$ , как и в решении 1, найдем единственно возможное значение для  $a$ :

$$a = \sqrt{6+a} \Rightarrow a^2 - a - 6 = (a+2)(a-3) = 0 \stackrel{a \geq 0}{\Rightarrow} a = 3.$$

Используя найденное значение для  $a$ , из той же формулы получаем

$$|x_{n+1} - a| = |\sqrt{6+x_n} - 3| = \frac{|x_n - 3|}{\sqrt{6+x_n} + 3} \leq \frac{|x_n - 3|}{3} \Rightarrow |x_n - 3| \leq \frac{|x_1 - 3|}{3^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (1)$$

Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ .

**Замечание.** Отметим, что сделанное в начале решения предположение о существовании предела, никак не сказывается на обоснованности решения! Это предположение используется *только для того*, чтобы «догадаться», что подставить вместо  $a$  в (1). Если рассматриваемая последовательность монотонна, то найденное значение *предполагаемого* предела может быть использовано и при доказательстве ограниченности последовательности. Например, поскольку последовательность  $x_n$  в задаче 3 монотонно возрастает, и *если* искомый предел существует, то по теоремам 1 и 3 *должно быть*  $x_n \leq a = 3$ . После того, как требуемое неравенство *сформулировано*, оно легко доказывается по индукции:

$$x_n \leq 3 \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{6+x_n} \leq \sqrt{6+3} = 3.$$

**Задача 4.** Доказать, что последовательность  $x_n$ , где  $x_1 = 0$ ,  $x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_n + 2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , имеет предел и найти его.

**Решение.** Так как  $0 \leq x_n < 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , то последовательность ограничена. Покажем, что  $x_n$  — монотонна. Функция  $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$  возрастает на  $(-2, \infty)$ , поскольку  $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$  на  $(-2, \infty)$ . Далее,

---

<sup>1)</sup> Это равенство называется *рекуррентной формулой*, а корни уравнения  $a = f(a)$  — неподвижными точками функции  $f(x)$ .

$$x_1 = 0 < \frac{1}{2} = x_2 \Rightarrow x_2 = f(x_1) < f(x_2) = x_3 \Rightarrow x_3 = f(x_2) < f(x_3) = x_4 \Rightarrow \dots$$

Значит, последовательность  $x_n$  возрастает, и, по теоремам 1 и 3, существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in [0, 1]$ . Переходя к пределу в равенстве

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_n + 2}, \text{ получим } a = \frac{a+1}{a+2} \Rightarrow a^2 + a - 1 = 0 \stackrel{a \in [0, 1]}{\Rightarrow} a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

**Задача 5.** Найти предел последовательности

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

**Решение.** Имеем

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{n \text{ слагаемых}} \leq x_n \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{n \text{ слагаемых}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

По теореме 2  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ , поскольку  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$ .

**Задача 6.** Доказать, что последовательность  $x_n$ , где  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $a > 0$ ,  $x_1 > 0$ , имеет предел и найти его.

**Решение 1.** Имеем  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;

$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \leq \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{x_n^2}{x_n} \right) = x_n$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Таким образом, последовательность  $\{x_n\}_2^\infty$  не возрастает и ограничена:  $\sqrt{a} \leq x_n \leq x_2$ . По теоремам 1 и 3 существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \geq \sqrt{a}$ . Переходя к пределу в рекуррентной формуле, получаем  $b = \frac{1}{2} \left( b + \frac{a}{b} \right) \Rightarrow b^2 = a \stackrel{b \geq \sqrt{a}}{\Rightarrow} b = \sqrt{a}$ .

**Замечание.** При  $a = 0$  и любом  $x_1 \neq 0$  имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  (см. задачу 1).

**Решение 2.** Как и в решении 1, получаем  $x_n \geq \sqrt{a}$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right)$ . Тогда  $0 \leq f'(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a}{x^2} \right) \leq \frac{1}{2}$  при

$x \geq \sqrt{a}$ , и  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Предполагаемое значение предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$  (см. задачу 3) ищем среди неподвижных точек функции  $f(x)$ :

$$b = \frac{1}{2} \left( b + \frac{a}{b} \right) \Rightarrow b^2 = a \stackrel{b \geq \sqrt{a}}{\Rightarrow} b = \sqrt{a}.$$

Применяя формулу Лагранжа, получим

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| = |f(x_n) - f(\sqrt{a})| = |f'(c_n)| \cdot |x_n - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2} |x_n - \sqrt{a}|, \quad (2)$$

где  $c_n \in [\sqrt{a}, x_n]$ . Из (2), как и в задаче 1, вытекает, что

$$|x_n - \sqrt{a}| \rightarrow 0 \Rightarrow x_n \rightarrow \sqrt{a}.$$

**Замечание.** Можно обойтись и без формулы Лагранжа:

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2} (x_n - \sqrt{a}) \left( 1 + \frac{\sqrt{a}}{x_n} \right) \leq \frac{1}{2} (x_n - \sqrt{a}), \quad n = 2, 3, \dots$$

**Задача 7.** Доказать, что  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \sim \ln n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Решение.** Для  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$  и  $y_n = \ln n$  по теореме 4 имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

поскольку  $\ln(1+x) \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ .

### Задачи для самостоятельного решения

8. Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \dots + \sqrt[3]{6}}}}{n \text{ корней}}$ .

9. Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^4 + 1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4 + 2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4 + n}} \right)$ .

10. Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}$ , где  $a > 1$ .

11. Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{n! \ln n}$ , где  $d_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & n+1 \end{vmatrix}$ .

12. Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , где  $x_1 > 0$ ,  $x_{n+1} = \frac{4}{x_n + 3}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

**Замечание.** Задача 3 взята из [1], задачи 5, 9, 11 – из [4], задача 6 – из [3], задача 10 – из [2].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. СПб.: Лань, 2016. 416 с.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. СПб.: Лань, 2018. 624 с.
3. Кудрявцев Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. 2-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 496 с.
4. Попов И.Ю. Задачи студенческих математических олимпиад. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2006. 154 с.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 680 с.

УДК 66.026.4

**В. К. Леонтьев, О. Н. Кораблева**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: leontievvk@ystu.ru

## К ВЫВОДУ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ЦЕНТРОБЕЖНОГО НАСОСА

*Представлен вывод основного уравнения центробежного насоса – уравнения Л.Эйлера на основе уравнения Д. Бернулли.*

**Ключевые слова:** центробежный насос, кинетическая энергия жидкости, теоретический напор, потери напора, уравнение Д. Бернулли, уравнение Л. Эйлера.

**V. K. Leont'ev, O. N. Korableva**

Yaroslavl State Technical University,  
Russia, Yaroslavl, e-mail: leontievvk@ystu.ru

## TO THE CONCLUSION OF THE BASIC EQUATIONS OF THE CENTRIFUGAL PUMP

*The conclusion of the main equation of the centrifugal pump-the equation of L. Euler on the basis of the equation of D. Bernoulli is presented.*

**Keywords:** centrifugal pump, the kinetic energy of the liquid, the theoretical head, head losses, D. Bernoulli equation, L. Euler's equation.

Для транспортировки жидкостей по трубопроводам как внутри предприятия между отдельными аппаратами и установками, так и вне его используются насосы. Насосы – это гидравлические машины, которые преобразуют механическую энергию двигателя в энергию перемещаемой жидкости, повышая ее давление. Перемещение жидкости в насосе и трубопроводе осуществляется за счет перепада (разности) давлений [1].

Основным параметром любого насоса является напор. Напор  $H$  (м) характеризует удельную энергию, которая передается насосом единице веса перекачиваемой жидкости. Этот параметр показывает, насколько увеличивается удельная энергия жидкости при прохождении ее через насос.

Основное уравнение центробежного насоса устанавливает зависимость между теоретическим напором  $H_T$  и скоростями движения жидкости внутри рабочего колеса.

Как правило, для вывода основного уравнения центробежного насоса используется теорема механики момента количества движения – изменение в единицу времени момента количества движения равно моменту равнодействующей внешних сил, действующих на систему.

Использование теоремы механики момента количества движения для определения напора центробежного насоса в учебном процессе связано с определенными сложностями, обусловленными сокращением учебных часов на изучение технических дисциплин.

При выводе основного уравнения центробежного насоса делаются два допущения:

1. Жидкость идеальная, т.е. отсутствуют потери напора при движении жидкости внутри колеса;
2. Движение жидкости параллельно струйчатое и осесимметричное. Последнее условие возможно при бесконечном числе лопаток.

С учетом приведенных выше допущений движение жидкости внутри рабочего колеса будет соответствовать рис. 1.

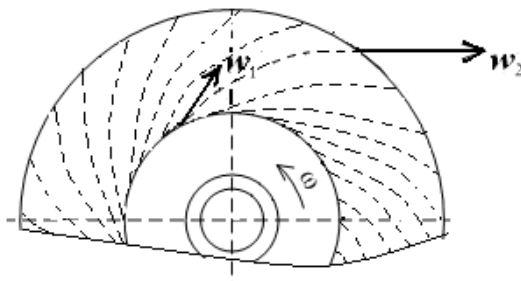
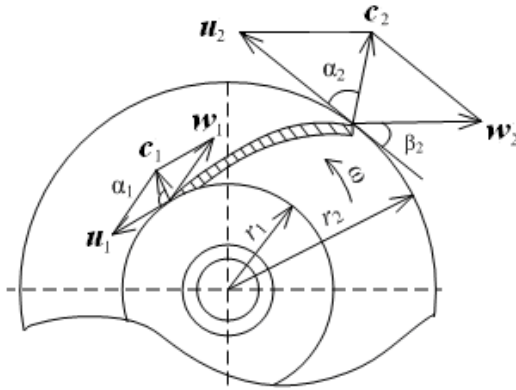


Рис. 1. Движение жидкости внутри рабочего колеса центробежного насоса

При работе насоса каждая частица жидкости в канале рабочего колеса движется вдоль лопатки, вращаясь одновременно вместе с рабочим колесом. Движение жидкости характеризуется абсолютной скоростью  $c$ . Эта скорость может быть представлена геометрической суммой двух скоростей: окружной  $u$  и относительной  $w$ . Окружная скорость вращения частицы определяется по уравнению  $u = \omega \cdot r$ , где  $r$  – радиус окружности вращения частицы;  $\omega$  – угловая скорость вращения рабочего колеса [2]. Графическое изображение вышеуказанных скоростей называется параллелограмми скоростей (рис. 2).



**Рис. 2. Графическое изображение скоростей на входе в рабочее колесо центробежного насоса и выходе из него**

Для определения теоретического напора центробежного насоса будем использовать уравнение Бернулли [3]. Горизонтальная плоскость сечения рабочего колеса принимается за плоскость сравнения, при этом геометрические напоры в рассматриваемых сечениях будут равны  $z_1 = z_2$ .

Если бы колесо центробежного насоса было неподвижно и жидкость двигалась через него с теми же относительными скоростями, что и во вращающемся колесе, то уравнение Бернулли в этом случае имело бы вид

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{w_2^2}{2g}.$$

За счет центробежной силы при вращении рабочего колеса жидкости сообщается дополнительная энергия  $A = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g}$ , и уравнение энергетического баланса можно записать в виде

$$A + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{w_2^2}{2g}.$$

Таким образом, уравнение Бернулли принимает вид

$$\frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{w_2^2}{2g}.$$

Откуда разница пьезометрических напоров  $\frac{p_2 - p_1}{\rho g} = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g}$ .

Напор жидкости на входе в рабочее колесо и на выходе из него при  $z_1 = z_2$  составит

$$H_1 = \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{c_1^2}{2g} \quad \text{и} \quad H_2 = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{c_2^2}{2g}.$$

Отсюда теоретический напор, развиваемый лопатками рабочего колеса:

$$H_T = \frac{p_2 - p_1}{\rho \cdot g} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g}.$$

Подставив разницу пьезометрических напоров в уравнение теоретического напора, получим выражение

$$H_T = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g}.$$

Если принять допущение, что все частицы движутся по подобным траекториям, то зависимость между скоростями частицы на входе в колесо и на выходе из него определится по теореме косинусов (см. рис. 2):

$$w_1^2 = u_1^2 + c_1^2 - 2 \cdot u_1 c_1 \cos \alpha_1 \quad \text{и} \quad w_2^2 = u_2^2 + c_2^2 - 2 \cdot u_2 c_2 \cos \alpha_2,$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  – угол между абсолютной и окружной скоростями на входе в рабочее колесо и выходе из него;

Вычитая из одного равенства другое, получим

$$w_1^2 - w_2^2 = u_1^2 - u_2^2 + c_1^2 - c_2^2 + 2 \cdot (u_2 c_2 \cos \alpha_2 - u_1 c_1 \cos \alpha_1).$$

Подставив полученное выражение в формулу определения теоретического напора и проведя сокращения, находим основное уравнение центробежного насоса – уравнение Эйлера:

$$H_T = \frac{1}{g} (u_2 \cdot c_2 \cdot \cos \alpha_2 - u_1 \cdot c_1 \cdot \cos \alpha_1).$$

Полученное уравнение применимо ко всем центробежным машинам, в том числе и к вентиляторам, и компрессорам. Оно позволяет проводить

анализ работы центробежной машины в зависимости от формы лопаток и их угла наклона.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Касаткин А.Г.* Основные процессы и аппараты химической технологии. 15-е изд. М.: Альянс, 2009. 759 с.
2. *Леонтьев В.К.* Изучение насосов динамического действия: Учебное пособие / В.К. Леонтьев, О.Н. Кораблева, М.А. Юровская. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2014. 100 с.
3. *Плановский А.Н.* Процессы и аппараты химической технологии / А.Н. Плановский, В.Н. Рамм, С.З. Каган. 4-е изд. М.: Химия, 1967. 848 с.

УДК 66.048

**В. К. Леонтьев, О. Н. Кораблева, А. А. Киселева**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: leontievvk@ystu.ru

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ТРЕНИЯ**

*Приводятся и анализируются расчетные формулы для определения коэффициента гидравлического трения, используемые студентами при расчетах трубопроводов и гидравлических устройств.*

**Ключевые слова:** энергия жидкости, напор, вязкость, шероховатость трубопровода, критерий Рейнольдса, потери напора, режимы движения жидкости, коэффициент гидравлического трения.

**V. K. Leont'ev, O. N. Korableva**

Yaroslavl State Technical University,  
Russia, Yaroslavl, e-mail: leontievvk@ystu.ru

## **DETERMINATION OF THE COEFFICIENT OF HYDRAULIC FRICTION**

*Calculated formulas for determining the coefficient of hydraulic friction used by students in the calculations of pipelines and hydraulic devices are presented and analyzed.*

**Keywords:** fluid energy, head, viscosity, roughness of the pipeline, Reynolds criterion, head loss, fluid flow regimes, the coefficient of hydraulic friction.



Движение жидкости по трубопроводам и каналам осуществляется за счет удельной механической энергии самой жидкости, т.е. полного гидродинамического напора. При движении реальной жидкости вследствие влияния сил молекулярного сцепления между стенкой трубопровода или канала и жидкостью происходит торможения потока, приводящее к появлению разности скоростей движения отдельных слоев жидкости друг относительно друга, что приводит к возникновению напряжения трения между слоями. Также движение сопровождается зачастую вращением, вихреобразованием и перемешиванием частиц. Таким образом, на преодоление гидравлических сопротивлений (сопротивление трения и местные сопротивления) затрачивается энергия движущейся жидкости, т.е. снижается полный гидродинамический напор. Расчет потерь напора на преодоление гидравлического сопротивления при движении реальной жидкости по трубопроводам является одним из основных вопросов гидравлики [1].

На величину потерь напора оказывает влияние режим течения жидкости. При ламинарном режиме движения все частицы жидкости движутся по параллельным траекториям. Турбулентный режим течения характеризуется интенсивным перемешиванием жидкости как в поперечном (по сечению потока), так и в продольном (по длине потока) направлениях. В результате интенсивного перемешивания потока при турбулентном движении жидкости происходит затрата энергии на движение больше, чем при ламинарном движении [2].

Влияние режима движения на величину потерь напора учитывается величиной коэффициента гидравлического трения  $\lambda$ . На практике для определения коэффициента гидравлического трения  $\lambda$  используется большое количество эмпирических и полуэмпирических формул, учитывающих особенности движения жидкости.

Поверхность любого трубопровода всегда имеет естественную шероховатость, обусловленную материалом, технологией изготовления трубопровода, сроком службы и параметрами перекачиваемой жидкости. Средняя высота выступов шероховатости называется абсолютной шероховатостью и обозначается  $\Delta$ . Абсолютная шероховатость не может полностью характеризовать влияние стенок на движение жидкости, поскольку стенки с одной и той же шероховатостью в потоках небольших поперечных размеров будут вносить большие возмущения в поток жидкости и оказывать большее сопротивление движению, чем в потоках большого сечения. Поэтому для характеристики влияния шероховатости на величину гидравлических сопротивлений используется относительная шероховатость, представляющая собой отношение абсолютной шероховатости к линейному размеру, характеризующему сечение потока, например к диаметру трубопровода  $\frac{\Delta}{d}$  [3].

В гидравлике в зависимости от соотношения между толщиной вязкого подслоя и значения абсолютной шероховатости трубопровода или канала трубы или стенки рассматривают как гидравлически гладкие ( $\delta_{\text{слоя}} > \Delta$ ) или гидравлически шероховатые ( $\delta_{\text{слоя}} < \Delta$ ).

В учебной литературе рекомендуется множество расчетных формул для определения коэффициента трения. При этом студенты не всегда могут правильно выбрать нужную формулу.

В таблице 1 приведены основные расчетные формулы для определения коэффициента гидравлического трения.

**Таблица 1. Расчетные формулы для определения коэффициента гидравлического трения [2, 4]**

Формула	Автор	Область применения
$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$	Формула Пуазейля	Ламинарный режим
$\lambda = \frac{0,316}{\text{Re}^{0,25}}$	Формула Блазиуса	Зона гладкостенного сопротивления
$\lambda = \frac{1}{(1,81 \lg \text{Re} - 1,52)^2}$	Формула Кольбрука	Зона доквадратичного сопротивления
$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left[ \frac{(\Delta/d)}{3,7} + \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \right]$	Формула Кольбрука - Уайта	Зона доквадратичного сопротивления
$\lambda = 0,11 \cdot \left( \frac{68}{\text{Re}} + \frac{\Delta}{d} \right)^{0,25}$	Формула Альтшуля	Зона доквадратичного сопротивления
$\lambda = \frac{1}{\left( 1,74 + 2 \lg \frac{d}{\Delta} \right)^2}$	Формула Прандля - Никурадзе	Зона квадратичного сопротивления
$\lambda = \frac{0,312}{d^{0,226}} \left( 1,9 \cdot 10^{-6} + \frac{\mu}{v \cdot \rho} \right)^{0,226}$	Формула Шевелева	Зона доквадратичного сопротивления

Кроме вышеприведенных формул в справочной учебной литературе для определения коэффициента трения используется график Мурина (зависимость коэффициента трения от критерия Рейнольдса и относительной шероховатости трубопровода).

Большое влияние на коэффициент трения, т.е. на величину потерь напора, оказывает вязкость жидкости. Нами был проведен анализ влияния вязкости перекачиваемой жидкости на коэффициент трения. В качестве модельной жидкости выбран 50%-ный раствор глицерина. В расчетах предполагалось, что перекачиваемая жидкость движется по трубопроводу с внутренним диаметром 50 мм (57х3,5 мм) со скоростью 2 м/с.

**Таблица 2. Результаты расчета влияния вязкости жидкости на значение коэффициента гидравлического трения**

	Температура, °С					
	0	20	40	60	80	100
Динамический коэффициент вязкости $\mu$ , МПа.с	12,0	6,05	3,5	2,0	1,2	0,73
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1136	1126	1116	1106	1006	996
Критерий Рейнольдса $Re = \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\mu}$	9466,7	18612	31886	55300	83833	136438
$\lambda$ по формуле Блазиуса	0,032	0,027	0,0236	0,0206	0,0186	0,0164
$\lambda$ по формуле Кольбрука	0,031	0,0259	0,0227	0,0200	0,0183	0,0165
$\lambda$ по формуле Альтшуля	0,0358	0,0325	0,0308	0,0296	0,0290	0,0285
$\lambda$ по формуле Кольбрука-Уайта	0,0367	0,0335	0,0318	0,030	0,0295	0,0292
$\lambda$ по формуле Шевелева	0,0445	0,0382	0,0358	0,0344	0,0333	0,326
$\lambda$ по графику Мурина	0,0345	0,0325	0,0300	0,0290	0,0286	0,0284

Согласно справочным данным для выбранного трубопровода авто-модельная область наступает при значениях критерия Рейнольдса  $Re > 100000$ . Расчетное значение коэффициента трения, определенное по формуле Прандля – Никурадзе составляет  $\lambda = 0,0234$ . К этому значению и приближаются значения коэффициентов трения, определенные по формулам Альтшуля и Кольбрука – Уайта, а также по графику Мурина.

Анализируя полученные результаты можно сделать следующие выводы:

1. Значения коэффициента трения, рассчитанные по формуле Альтшуля и определенные по графику Мурина, практически совпадают, при этом значения коэффициентов трения, определенные по формуле Кольбука – Уайта близки к ним, но использование последней формулы ограничивается сложностью расчета.

2. Значения коэффициентов трения, вычисленные по формуле Шевелева слишком завышены, а вычисленные по формулам Блазиуса и Кольбука занижены особенно при низких значениях динамического коэффициента вязкости (высоких значениях критерия Рейнольдса).

Таким образом, на наш взгляд наиболее рационально проводить оп-ределение коэффициента трения:

- для ламинарного режима движения по формуле Блазиуса;
- для переходного и турбулентного как в зоне доквадратичного со-противления, так и в зоне квадратичного сопротивления шероховатых труб по формуле Альтшуля или использовать график Мурина. При этом полу-ченные значения коэффициента трения практически совпадают.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Касаткин А.Г.* Основные процессы и аппараты химической технологии. 15-е изд. М.: Альянс, 2009. 759 с.
2. *Вильнер Я. М.* Справочное пособие по гидравлике, гидромашинам и гидропри-водам / Я.М. Вильнер, Я.Т. Ковалев, Б.Б. Некрасов. Минск: Высш. школа, 1976. 415 с.
3. *Рабинович Л.Л.* Гидравлика. М.: Недра, 1974. 266 с.
4. *Павлов К.Ф.* Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии / К.Ф. Павлов, П.Г. Романков, А.А. Носков. 13-е изд. М.: Альянс, 2005. 576 с.

УДК 51:378

**Ю. К. Оленикова, В. Ш. Ройтенберг**

## **О ЯРОСЛАВСКИХ СТУДЕНЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАДАХ 2018 ГОДА**

*Приводятся сведения о международной и всероссийской студенческих ма-тематических олимпиадах, проводимых на базе Ярославского государственного технического университета в 2018 году, задания олимпиад и примеры их решения.*

**Ключевые слова:** студенческая математическая олимпиада, задания, ре-шение задач.

**J. K. Olenikova, V. Sh. Roitenberg**

## **ABOUT YAROSLAVL STUDENT MATHEMATICAL OLYMPIADS IN 2018**

*We provide information about the international and all-Russian student mathematical Olympiads held on the basis of Yaroslavl State Technical University in 2018, the tasks of the Olympiads and examples of their solutions.*

**Keywords:** *student mathematical Olympiad, task, solution of tasks.*

### **1. Об олимпиадах и их результатах**

С 20 по 24 сентября 2018 года на базе Ярославского государственного технического университета (ЯГТУ) проводилась Всероссийская студенческая олимпиада по математике, включенная министерством науки и высшего образования РФ в приказ, называемый «Перечень олимпиад и иных интеллектуальных и (или) творческих мероприятий, направленных на развитие интеллектуальных и творческих способностей, способностей к занятиям физической культурой и спортом, интереса к научной (научно-исследовательской), инженерно-технической, изобретательской, творческой, физкультурно-спортивной деятельности, а также на пропаганду научных знаний, творческих и спортивных достижений, на 2018/19 учебный год» [1].

В соответствии с Положением об этой олимпиаде она проводилась среди студентов и курсантов высших военных училищ 2-5-х курсов и магистрантов, обучающихся по направлениям 04.00.00 -38.00.00, 44.00.00.

По традиции, сложившейся в последние два десятилетия, одновременно с Всероссийской олимпиадой проводилась и IX Международная студенческая олимпиада по математике среди обучающихся по всем направлениям экономических, технических и физико-математических специальностей. Международные математические олимпиады в Ярославле начали проводиться по инициативе ЯГТУ при поддержке Администрации Ярославской области с целью укрепления международного сотрудничества. Проводятся обе олимпиады одновременно по одним и тем же олимпиадным заданиям [2].

Следует отметить, что до 2007 года олимпиада была одна, носила название – Международная и регистрировалась в плане проведения ВСО (всероссийской студенческой олимпиады) Минобрнауки. Разделение олимпиады на две произошло по двум причинам. Первая причина – ужесточение требований к заявке на проведение олимпиады, заключающееся в подписи УМО по специальностям, для которых проводится олимпиада, а в ЯГТУ математических специальностей нет. И вторая – появление в 2007

году премии Президента для поддержки талантливой молодежи, на которую могли претендовать победитель и призеры, являющиеся гражданами РФ в возрасте до 25 лет.

Общее число участников в олимпиадах этого года было примерно на 30 % меньше обычного, а также желающих принимать участие в этих олимпиадах по предварительным заявкам. К сожалению, по разным причинам в 2018 г. впервые международный уровень олимпиад был обеспечен только иностранными студентами, обучающимися в российских вузах. Всего участвовало 107 студентов и курсантов из 23 вузов и военных училищ. Несмотря на относительно небольшое число для ярославских олимпиад участников, их география впечатляет: 17 городов из 16 регионов и 7 федеральных округов (в этом году не было только студентов Дальневосточного федерального округа).

Как и все олимпиады, проводимые ЯГТУ, эти олимпиады имели свою особенность. Впервые соорганизатором олимпиад выступил Рязанский государственный радиотехнический университет (РГРТУ). И это не случайно. Кафедры высшей математики ЯГТУ и РГРТУ 15 лет тесно сотрудничают и не только в области организации и проведения олимпиад. Имея достаточно большой опыт в организации и проведении межрегиональных студенческих олимпиад, руководство и коллеги из РГРТУ внесли большой вклад в проведение настоящих олимпиад. Кроме участия в организационных вопросах, ими были привлечены спонсорские средства (спонсор олимпиад АО «Рязанское конструкторское бюро «Глобус»») на приобретение призов для участников, показавших высокие результаты. А абсолютные победители олимпиад (три лучших результата), кроме дипломов, кубков, подарков, были награждены премией Г.Н. Шуппе, учрежденной ООО «Маркетплейс» совместно с РГРТУ за особые успехи в изучении математики, физики [3].

**Победитель и призеры** (указаны набранные баллы из 100 возможных):

**1-е место**

Кичак Евгений Петрович, студент МТУ МИРЭА,  
г. Москва, 95 баллов

**2-е место**

Малинский Антон Олегович, студент МГТУ им. Н.Э. Баумана,  
г. Москва, 69 баллов

**3-е место**

Юрин Григорий Анатольевич, курсант ВА ВКО им. Г.К. Жукова,  
г. Тверь, 66 баллов

По итогам олимпиад следует отметить, что:

- задания, близкие к учебным, участникам более привлекательны;
- победы случайными не бывают. Так, Евгений Кичак с результатом 94 балла был победителем и VIII Международной олимпиады, проводившейся в Ярославле в 2016 году; в 2014 и 2016 годах победителем Всероссийской олимпиады был студент ТПУ Антон Кулагин;

- наибольшую «массовую» успешность показывают студенты тех вузов, в которых серьезно занимаются фундаментальной подготовкой студентов. По понятным причинам, в последнее время к ним стали относиться военные вузы.

## 2. Содержание и образцы решений олимпиадных заданий

1. Вычислить определитель  $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 3 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{vmatrix}$ .

**Решение.** Из каждой строки матрицы  $A$ , начиная со второй, вычтем первую. Получим матрицу  $B$  с элементами  $b_{ij} = 1$ ,  $b_{ij} = i - j$  при  $i \geq 2$ ,  $j < i$  и  $b_{ij} = 0$  при  $j \geq i \geq 2$  и тем же определителем. Дополнительные миноры первой строки матрицы  $B$ :  $M_{1j} = 0$  при  $j = 1, 2, \dots, n-1$ , поскольку их последний столбец нулевой, а  $M_{1n} = 1$ , так как является определителем треугольной матрицы с единицами на главной диагонали. Поэтому  $\det A = \det B = (-1)^{n+1} M_{1n} = (-1)^{n+1}$ .

2. Найти все  $2\pi$ -периодические функции  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , такие, что при всех  $x \in \mathbb{R}$   $f(x) + 2f(x + 2\pi/3) + 4f(x + 4\pi/3) = \sin x$ .

**Решение.** Пусть периодическая функция  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , удовлетворяет указанному тождеству. Заменяя  $x$  на  $x + 2\pi/3$  и  $x + 4\pi/3$ , получаем

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + 2\pi/3) + 2f(x + 4\pi/3) + 4f(x) = \sin(x + 2\pi/3),$$

$$f(x + 4\pi/3) + 2f(x) + 4f(x + 2\pi/3) = \sin(x + 4\pi/3).$$

Вместе с первоначальным равенством получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно  $f(x)$ ,  $f(x + 2\pi/3)$ ,  $f(x + 4\pi/3)$ :

$$f(x) + 2f(x + 2\pi/3) + 4f(x + 4\pi/3) = \sin x,$$

$$4f(x) + f(x + 2\pi/3) + 2f(x + 4\pi/3) = \sin(x + 2\pi/3),$$

$$2f(x) + 4f(x + 2\pi/3) + f(x + 4\pi/3) = \sin(x + 4\pi/3).$$

Решая ее, получаем  $f(x) = \frac{2}{7} \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{7} \sin x$ . Ясно, что эта функция  $2\pi$ -периодическая и удовлетворяет заданному уравнению.

**3.** Область  $G$  на плоскости задана неравенством

$$x^4 y^2 + 2x^2 y^4 + y^6 - 4x^3 y^2 - 4xy^4 + 4x^2 y^2 - 2xy^3 + 2y^3 - y^2 \leq 0.$$

Существует ли отрезок длины 4, проходящий через точку  $C(1; 0)$  и принадлежащий  $G$ ?

**Решение.** Введем координаты  $X = x - 1, Y = y$ . В этих координатах  $G$  задается неравенством  $(X^4 + Y^4 + 2X^2 Y^2 - 2X^2 - 2Y^2 - 2XY)Y^2 \leq 0$  или равносильным неравенствами  $(X^2 + Y^2)^2 \leq 2(X^2 + Y^2) + 2XY$ . В полярных координатах  $\rho, \varphi$  ( $X = \rho \cos \varphi, Y = \rho \sin \varphi$ ) получаем  $\rho^4 \leq (2 + \sin 2\varphi)\rho^2$ . Поэтому  $\rho^2 \leq 2 + \sin 2\varphi$  и  $\rho \leq \sqrt{2 + \sin 2\varphi} \leq \sqrt{3}$ . Следовательно, отрезок длины  $> 2\sqrt{3}$  и, тем более, длины 4 содержаться в  $G$  не может.

**4.** Пересекаются ли отрезки  $AB$  и  $CD$ , если  $A(2;1), B(11;20), C(13;25), D(5;4)$ ?

**Решение 1.** Параметрические уравнения:

отрезка  $AB$ :  $x = 2 + 9t, y = 1 + 19t, t \in [0;1]$ ,

отрезка  $CD$ :  $x = 5 + 8s, y = 4 + 21s, s \in [0;1]$ .

Для параметров  $t$  и  $s$  возможной точки пересечения отрезков получаем систему уравнений

$$2 + 9t = 5 + 8s, 1 + 19t = 4 + 21s \quad \text{или} \quad \begin{cases} 9t - 8s = 3, \\ 19t - 21s = 3. \end{cases}$$

Решая систему, получаем  $t = 39/37$ , что противоречит условию  $t \in [0;1]$ . Поэтому отрезки не пересекаются.

**Решение 2.** Напишем для прямых  $AB$  и  $CD$  уравнения с угловым

коэффициентом:  $y = \frac{19}{9}x - \frac{29}{9}$  и  $y = \frac{21}{8}x - \frac{73}{8}$ . Прямые пересекаются в

точке с  $x = \frac{425}{37} > 11$ , а для точек отрезка  $AB$   $2 \leq x \leq 11$ . Поэтому отрезок

$AB$  не имеет общих точек с прямой  $CD$  и, тем более, с отрезком  $CD$ .



**Решение 3.** Напишем уравнение прямой  $CD$ :  $21x - 8y - 73 = 0$ . Обозначим  $l(x, y) = 21x - 8y - 73$ . В точках прямой  $CD$   $l(x, y) \equiv 0$ . Так как

$$l(A) = 21 \cdot 2 - 8 \cdot 1 - 73 = -39 < 0, \quad l(B) = 21 \cdot 11 - 8 \cdot 20 - 73 = -2 < 0,$$

то точки  $A$  и  $B$  лежат в одной полуплоскости  $l(x, y) < 0$ . Так как полуплоскость – выпуклое множество, то и отрезок  $AB$  лежит в этой полуплоскости, а потому с прямой  $CD$  и тем более с отрезком  $CD$  не пересекается.

**5.** Пусть последовательность  $x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , с положительными членами – периодическая: существует такое  $p \in \mathbb{N}$ , что для любого  $n \in \mathbb{N}$  имеем  $x_{n+p} = x_n$ . Доказать, что последовательность средних

$$\bar{x}_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

имеет предел; найти этот предел.

**Решение 1.** Покажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = \bar{x}_p = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_p}{p}$ . Число

$n \in \mathbb{N}$ ,  $n > p$ , можно записать в виде  $n = mp + r$ , где  $m \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq r < p$ . (Поскольку  $m$  и  $r$  зависят от  $n$ , то следовало бы их обозначить  $m_n$  и  $r_n$ . Однако ввиду громоздкости таких обозначений мы будем опускать индекс  $n$ ). Имеем  $n - p < mp \leq n < (m+1)p$ . Используя периодичность, получаем

$$\bar{x}_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{mp} + x_{mp+1} + \dots + x_{mp+r}}{mp+r} = \frac{m(x_1 + x_2 + \dots + x_p) + x_1 + \dots + x_r}{mp+r},$$

$$\bar{x}_n \leq \frac{m(x_1 + \dots + x_p) + x_1 + \dots + x_r}{mp} = \frac{x_1 + \dots + x_p}{p} + \frac{x_1 + \dots + x_r}{mp} \leq \bar{x}_p + \frac{x_1 + \dots + x_p}{n-p} = v_n,$$

$$\bar{x}_n \geq \frac{m(x_1 + \dots + x_p) + x_1 + \dots + x_r}{(m+1)p} = \frac{(m+1)(x_1 + \dots + x_p) - (x_{r+1} + \dots + x_p)}{(m+1)p} =$$

$$= \bar{x}_p - \frac{x_{r+1} + \dots + x_p}{(m+1)p} \geq \bar{x}_p - \frac{x_1 + \dots + x_p}{n} = u_n$$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \bar{x}_p$ , то и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = \bar{x}_p$ .

**Решение 2.** Начинаем как в решении 1.

$$\bar{x}_n = \frac{m(x_1 + \dots + x_p) + x_1 + \dots + x_r}{mp+r} = \frac{(x_1 + \dots + x_p) + \frac{x_1 + \dots + x_r}{m}}{p + \frac{r}{m}}.$$

Так как  $m > \frac{n-p}{p}$ , то  $0 \leq \frac{x_1 + \dots + x_r}{m} \leq \frac{(x_1 + \dots + x_p)p}{n-p}$  и  $0 \leq \frac{r}{m} \leq \frac{p^2}{n-p}$ . Поскольку  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_1 + \dots + x_p)p}{n-p} = 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^2}{n-p} = 0$ , то и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_r}{m} = 0$ , и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{m} = 0$ . Поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = \frac{x_1 + \dots + x_p}{p} = \bar{x}_p$ .

**6.** Найти наименьшую площадь треугольника, описанного вокруг эллипса с полуосями  $a$  и  $b$ .

**Решение.** 1) Сначала найдем минимальную площадь треугольника, описанного вокруг окружности радиуса  $a$ . Пусть  $2\alpha$ ,  $2\beta$  и  $2\gamma$  – углы этого треугольника. Тогда его площадь  $S = a^2(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)$ . Так как  $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$ , то приходим к задаче нахождения наименьшего значения функции двух переменных  $S(\alpha, \beta) = a^2(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{tg}(\alpha + \beta))$  на множестве  $\Delta: \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta < \pi/2$ . Критические точки находим из уравнений

$$S'_\alpha(\alpha, \beta) = a^2 \left( -\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2(\alpha + \beta)} \right) = 0,$$

$$S'_\beta(\alpha, \beta) = a^2 \left( -\frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2(\alpha + \beta)} \right) = 0.$$

Откуда  $\sin \alpha = \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$ ,  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{6}$ . Значение функции в критической точке  $S\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}a^2$ . Пусть  $\varphi \in (0, \pi/6)$  таково, что  $\operatorname{ctg}\varphi = 10$ . Треугольник  $\Delta_\varphi: \alpha \geq \varphi, \beta \geq \varphi, \alpha + \beta \leq (\pi/2) - \varphi$  – ограниченное замкнутое множество, а значение  $S(\alpha, \beta)$  в точках его границы  $> 10a^2 > S\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ . Поэтому наименьшее значение  $S(\alpha, \beta)$  в  $\Delta_\varphi$  существует и равно  $S\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}a^2$ . В точках множества  $\Delta \setminus \Delta_\varphi$   $S(\alpha, \beta) > 10a^2$  и потому наименьшее значение  $S(\alpha, \beta)$  в  $\Delta$  совпадает с наименьшим зна-

чением в  $\Delta_\varphi$ . Итак, наименьшая площадь треугольника, описанного вокруг окружности радиуса  $a$ , равна  $3\sqrt{3}a^2$ .

2) При преобразовании  $x$  а  $x$ ,  $y$  а  $\frac{b}{a}y$  окружность переходит в эллипс с полуосями  $a$  и  $b$ , треугольники, описанные вокруг окружности, переходят в треугольники, описанные вокруг эллипса, а их площади умножаются на  $b/a$ . Следовательно, наименьшая площадь треугольника, описанного вокруг эллипса, равна  $3\sqrt{3}ab$ .

7. Пусть  $f$  – функция, непрерывно дифференцируемая на множестве  $\mathbb{R}$  действительных чисел. Доказать, что функция

$$g(x) = \lim_{t \rightarrow +0} \int_{x-t}^{x+t} \frac{f(z+t) - f(z-t)}{t^2} dz$$

определена и непрерывна на  $\mathbb{R}$ .

**Решение.** Пусть  $x$  – фиксировано. Подынтегральная функция непрерывна, и по интегральной теореме о среднем для любого  $t > 0$  найдется число  $\bar{z} = \bar{z}(t)$  между  $x-t$  и  $x+t$  такое, что

$$\begin{aligned} \int_{x-t}^{x+t} \frac{f(z+t) - f(z-t)}{t^2} dz &= \frac{f(\bar{z}+t) - f(\bar{z}-t)}{t^2} ((z+t) - (z-t)) = \\ &= 2 \frac{f(\bar{z}+t) - f(\bar{z}-t)}{t}. \end{aligned}$$

Применяя теперь теорему Лагранжа (дифференциальную теорему о среднем), получаем, что для любого  $t > 0$  найдется число  $c = c(t)$  между  $\bar{z}(t)-t$  и  $\bar{z}(t)+t$  такое, что

$$\int_{x-t}^{x+t} \frac{f(z+t) - f(z-t)}{t^2} dz = 2 \frac{f'(c)((\bar{z}+t) - (\bar{z}-t))}{t} = 4f'(c). \quad (*)$$

Так как  $x-2t < c = c(t) < x+2t$ , то  $\lim_{t \rightarrow +0} c(t) = x$ . Переходя в равенстве (\*) к пределу при  $t \rightarrow +0$  и учитывая непрерывность  $f'$ , получаем  $\forall x \in \mathbb{R} \ g(x) = 4f'(x)$ . Так как  $f'$  непрерывна, то и  $g$  непрерывна.

8. Вычислить двойной интеграл  $\iint_G x \cos y \, dx \, dy$ , где  $G$  – треугольник с вершинами в точках  $O(0,0)$ ,  $A(\pi/2, 0)$  и  $B(0, \pi)$ .

**Решение.** Граница  $G$  состоит из отрезков  $OA$ :  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq \pi/2$ ;  $AB$ :  $y = \pi - 2x$ ,  $0 \leq x \leq \pi/2$ , и  $OB$ :  $x = 0$ ,  $0 \leq y \leq \pi$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \iint_G x \cos y \, dx \, dy &= \int_0^{\pi/2} x \, dx \int_0^{\pi-2x} \cos y \, dy = \int_0^{\pi/2} x \sin y \Big|_0^{\pi-2x} \, dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} x \sin(\pi - 2x) \, dx = \int_0^{\pi/2} x \sin 2x \, dx = -\frac{x}{2} \cos 2x \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 2x \, dx = \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

9. Пусть  $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$ . Найти  $f^{(2018)}(0)$ .

**Решение 1.** При  $|x| < 1$

$$f(x) = \ln(1 + x^3) - \ln(1 + x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{3m}}{m} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}.$$

С другой стороны,  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$ .

Вследствие единственности разложения функции в степенной ряд

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^k \frac{1}{k} \quad \text{и} \quad f^{(k)}(0) = (-1)^k (k-1)!, \quad \text{если } k \text{ не делится на } 3,$$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^{(k/3)-1} \frac{1}{(k/3)} + (-1)^k \frac{1}{k} \quad \text{и} \quad f^{(k)}(0) = (3 \cdot (-1)^{(k/3)-1} + (-1)^k)(k-1)!,$$

если  $k$  делится на 3. Поскольку 2018 не делится на 3, то  $f^{(2018)}(0) = 2017!$

**Решение 2.** При  $|x| < 1/2$  имеем  $|x^2 - x| < 1$  и потому

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x^2 - x)^n}{n},$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sum_{k=0}^n C_n^k x^{2k} (-1)^{n-k} x^{n-k}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} C_n^k x^{n+k}}{n},$$

где  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . С другой стороны,  $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)x^m}{m!}$ . Поэтому

$$\frac{f^{(2018)}(0)}{2018!} = \sum_{n=1009}^{2018} \frac{(-1)^{2017-n} C_n^{2018-n}}{n} \quad \text{и} \quad f^{(2018)}(0) = 2018! \sum_{n=1009}^{2018} \frac{(-1)^{n-1} C_n^{2018-n}}{n}.$$

Конечно, выражение для  $f^{(2018)}(0)$  получилось не такое компактное, как в решении 1, но в условии задачи ничего не говорилось о форме представления  $f^{(2018)}(0)$ .

**Замечание.** Вместо ряда Тейлора в этих решениях можно использовать формулу Тейлора  $f(x) = \sum_{m=1}^p \frac{f^{(m)}(0)x^m}{m!} + o(x^p)$  при  $p \geq 2018$  и соответствующую теорему о единственности асимптотического разложения.

10. Для дифференциального уравнения  $\frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2y}{x}$ , заданного в области  $x > 0$ ,

а) записать общее решение;

б) найти решение  $y(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ , удовлетворяющее начальному условию  $y(1) = 0$ ;

в) доказать, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$  для любого решения  $y(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ .

**Решение.** а) Общее решение данного линейного неоднородного уравнения ищем методом вариации произвольной постоянной:  $y = ue^{-x^2/2}$ .

Подставляя в уравнение, получаем  $u'e^{-x^2/2} = \frac{1}{x}$ ,  $u' = \frac{e^{x^2/2}}{x}$ ,

$u = \int \frac{e^{x^2/2} dx}{x} = \int_1^x \frac{e^{t^2/2} dt}{t} + C$ , и общее решение можно записать в одной из следующих форм:

$$y = e^{-x^2/2} \int \frac{e^{x^2/2} dx}{x} \quad \text{или} \quad y = e^{-x^2/2} \left( \int_1^x \frac{e^{t^2/2} dt}{t} + C \right).$$

б) Используя начальное условие  $y(1) = 0$ , находим искомое решение

$$y(x) = e^{-x^2/2} \int_1^x \frac{e^{t^2/2} dt}{t}.$$

в) В зависимости от выбранной формы записи произвольного решения  $y(x)$  имеем по правилу Лопитала

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int \frac{e^{x^2/2} dx}{x}}{e^{x^2/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \int \frac{e^{x^2/2} dx}{x} \right)'}{(e^{x^2/2})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2/2}}{xe^{x^2/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

или

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \frac{e^{t^2/2}}{t} dt + C}{e^{x^2/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \int_1^x \frac{e^{t^2/2}}{t} dt + C \right)'}{(e^{x^2/2})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2/2}}{x e^{x^2/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

В табл. 1 приведена доля участников, полностью решивших задачу.

**Таблица 1. Доля участников, полностью решивших задачу**

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Доля, %	71	25	33	60	5	1	2	67	6	6

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГАРАНТ.РУ [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/56662936/>.
2. *Ройтенберг В.Ш.* Задачи студенческих математических олимпиад ЯГТУ / В.Ш. Ройтенберг, Ю.К. Оленикова, Л.А. Сидорова. 2-е изд., испр. и доп. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2015. 151 с.
3. Стипендия и премия имени Г.Н. Шуппе [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.rsreu.ru/en/root/the-chair-of-the-state-and-municipal-management-and-economic-theory/our-teachers-and-staff/174-kafedry/category-174/10881-item-10881>

УДК 51:37.016

**Т. А. Селеменова**

Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России  
Россия, г. Санкт-Петербург, e-mail: [tisi11@yandex.ru](mailto:tisi11@yandex.ru)

## **ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОМПЕТЕНТНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ВУЗЕ**

*Статья посвящена реализации компетентностного подхода в высшем образовании. Рассматривается сущность педагогического проектирования при формировании компетенций в процессе обучения математике. Выделяются особенности математических учебных курсов, которые необходимо учитывать при формировании компетенций.*

**Ключевые слова:** компетенция, компетентностный подход, обучение математике, педагогическое проектирование, высшее образование.

**T. A. Selemeneva**

Saint-Petersburg University of State Fire Service of EMERCOM of Russia  
Russia, Saint Petersburg, e-mail: *tisi11@yandex.ru*

## **PEDAGOGICAL PROJECTION OF COMPETENCE-ORIENTED MATHEMATICS TEACHING IN HIGHER EDUCATIONAL**

*The article is devoted to the implementation of the competence approach in higher education. The essence of pedagogical projecting in the formation of competencies in the process of teaching mathematics is considered. The features of mathematical training courses which need to be considered at formation of competences are allocated.*

**Keywords:** *competence, competence approach, teaching mathematics, pedagogical projecting, higher education.*

В современных условиях динамично меняющейся образовательной среды, характеризующейся новыми требованиями федеральных образовательных стандартов высшего образования и постоянным расширением технологических возможностей, актуальной проблемой обучения в вузе является повышение эффективности управления образовательным процессом [1, с. 53].

Принципиальным отличием действующего образовательного стандарта является его деятельностный характер, направленность на подготовку специалиста нового типа, конкурентоспособность которого базируется на формируемых в процессе обучения нормативных компетенциях. Практическая реализация компетентностного подхода в высшем образовании не возможна без использования педагогического проектирования, позволяющего осуществить научное обоснование методологических основ образовательного процесса, целенаправленный отбор содержания учебных дисциплин, технологий и методических систем обучения [2, с. 5].

Являясь производной широкого спектра социокультурных, организационных, управленческих и психолого-педагогических факторов, педагогическое проектирование представляет собой полифункциональную деятельность, закономерно возникающую в связи с необходимостью преобразований в образовательных системах и направленную на развитие преобразуемых объектов. Различные аспекты проблемы педагогического проектирования как средства реализации компетентностного подхода затрагивают в своих научных исследованиях В.П. Беспалько, А.В. Хуторской, А.А. Вербицкий, И.Р. Зимняя, Э.Ф. Зеер, Р.С. Йегер и др.

Особая роль в формировании конкурентоспособной личности будущего выпускника вуза отводится курсу математики, непосредственно связанному с развитием логического, алгоритмического, абстрактного мышления, формированием рациональных приемов поиска решения про-

блем, обоснованием принимаемых решений, позволяющим в дальнейшем за счёт прочной фундаментальной подготовки успешно осваивать новые знания и умения, овладевать профессиональными компетенциями.

Проектирование компетентностно-ориентированного обучения математике предполагает наличие определённой теоретико-методологической и практической базы, которую, в частности, составляют:

1) нормы и положения действующего федерального государственного образовательного стандарта высшего образования;

2) сущность компетентностного подхода и концептуальные основы его реализации в условиях современного вуза;

3) закономерности компетентностно-ориентированного обучения математике;

4) особенности конструирования процесса обучения математике в зависимости от профиля вуза, уровня и направления подготовки, специальности и т.д.;

5) теоретико-методологический уровень осознания проблемы формирования компетенций, готовность образовательной практики к реализации компетентностного подхода в математическом образовании.

Проектная деятельность, являясь специфической формой отношений в образовательном пространстве вуза, включает в себя цель, средства, результат и сам процесс деятельности. Среди компонентов проектной деятельности принято выделять анализ проблемы, постановку цели, выбор средств ее достижения, поиск и обработку необходимой информации, получение научно обоснованных и практически значимых выводов, а также оценку полученных результатов и выводов.

В условиях реализации компетентностного подхода в процессе обучения математике необходимо учитывать следующие особенности этой научной дисциплины. Математика представляет собой специфический язык (с присущими ему алфавитом, синтаксисом, семантикой), освоение которого в учебном курсе должно быть целенаправленным. Математическое моделирование и аксиоматический метод являются собственно математическими методами, представление о которых может служить важным показателем научной культуры обучающихся. Основным методом получения математических результатов является не требующий экспериментальной проверки логический вывод. Образование всех математических понятий базируется на логическом приеме абстрагирования, причем математическим абстракциям свойственна многоступенчатость (абстракции от абстракций), что может приводить к возникновению когнитивных барьеров в ходе обучения [3, с. 61].

Следствием содержательных особенностей, перечисленных выше, является универсальность математического языка, понятий и методов. Многие понятия, первоначально сформировавшиеся в математике (система, структура, множество и др.) в настоящее время приобрели общенауч-



ный статус и широко применяются практически во всех областях научно-практического знания. При этом математика в системе наук занимает особое место, поскольку по предмету исследования не относится ни к гуманитарным, ни к естественным наукам.

Учитывая выделяемые в научной педагогической литературе общие черты педагогического проектирования и особенности математики как учебной дисциплины, раскроем сущность педагогического проектирования с позиций компетентностно-ориентированного обучения математике:

- непосредственная связь с актуальными потребностями образовательного процесса и комплексом объективных условий обучения математике в вузе;

- заданный ситуационный характер процесса обучения математике в вузе;

- практико-ориентированный и прикладной характер учебных математических дисциплин;

- наукоемкий характер компетентностно-ориентированного обучения математике, постоянная опора на использование научных основ, современных технологий и поиск обновляющейся научной информации;

- итерационный (стадийный) характер проектирования, когда для достижения поставленной педагогической задачи осуществляется многократное моделирование объекта и последовательно принимаются педагогические решения.

При этом в качестве обобщенных объектов педагогического проектирования могут рассматриваться: обучающиеся (как субъект и объект обучения математике); содержание математического образования; технологии обучения математике (система методов, организационных форм и средств обучения, контроля, управления); деятельность преподавателя курса математики [4, с. 70].

Эффективность реализации в образовательном пространстве вуза компетентностно-ориентированного обучения математике напрямую зависит от качества педагогического проектирования, снижающего риск получения стихийных, незапланированных результатов, препятствующих достижению целей современного высшего образования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Грешных А.А.* Модель системы управления качеством образовательного процесса / А.А. Грешных, Е.Э. Отинова-Ордина // Психолого-педагогические проблемы безопасности человека и общества. 2012. № 1(14). С. 52-57.
2. *Калинина Е.С.* Совершенствование организации образовательного процесса в вузах МЧС России на основе новых информационных технологий: автореф. дис. ... канд. пед. наук. Санкт-Петербург, 2004. 23 с.
3. *Селеменова Т.А.* Применение информационных технологий при поэтапном формировании компетенций в вузе // Развитие образования. 2018. №1(1). С. 60-62.

4. Еременко С.П. Структурная модель учебно-методического комплекса «Математика для инженеров пожарной безопасности» / С.П. Еременко, Л.В. Медведева, М.С. Крюкова // Природные и техногенные риски (физико-математические и прикладные аспекты). 2017. № 1 (21). С. 68-72.

УДК 378.6

### **Е. Н. Трофимец**

Санкт-Петербургский университет  
государственной противопожарной службы МЧС России  
Россия, г. Санкт-Петербург, e-mail: ezemifort@inbox.ru

### **ОНЛАЙН-ОБУЧЕНИЕ В КОНТЕКСТЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

*Обоснована актуальность дистанционных образовательных технологий в математическом образовании. Рассмотрены особенности разработки онлайн-курсов по высшей математике и дидактические аспекты их применения для проведения вступительных испытаний в вузы МЧС России.*

**Ключевые слова:** дистанционные образовательные технологии, онлайн-курсы, высшая математика.

### **E. N. Trophimets**

Saint-Petersburg university of State Fire Service of EMERCOM of Russia  
Russia, Saint-Petersburg, e-mail: ezemifort@inbox.ru

### **ONLINE-LEARNING IN THE CONTEXT OF MATHEMATICAL EDUCATION**

*The urgency of distance educational technologies in mathematical education is proved. The features of the development of online courses in higher mathematics and didactic aspects of their application for the entrance tests to the universities of EMERCOM of Russia.*

**Keywords:** distance learning technologies, online courses, higher mathematics.

Информационно-аналитические технологии играют важную роль в образовательном процессе инженеров пожарной безопасности, инженеров техносферной безопасности, инженеров системного анализа и управления, юристов и психологов МЧС России.

Одной из форм организации информационно-аналитической подготовки является дистанционное обучение, которое наиболее эффективно применяется на заочной форме обучения и подготовительных курсах.

Преимущества использования дистанционных образовательных технологий (ДОТ):

- качественное образование на основе современных информационных технологий; возможность повышать образовательный уровень по месту жительства;

- доступность образовательных услуг и информационных ресурсов в любом месте и в любое время;

- самостоятельный выбор интенсивности обучения;

- постоянная связь с преподавателем, индивидуальное консультирование;

- техническая поддержка при работе с компьютерным оборудованием.

Одной из актуальных форм подготовки к вступительным испытаниям в вузы МЧС России, а также организации в них заочного обучения и курсов повышения квалификации является использование дистанционных образовательных технологий. Дистанционная форма обучения становится просто незаменимой, когда обучающимися являются действующие офицеры МЧС, проходящие службу в удаленных регионах нашей страны.

Основной целью использования дистанционных образовательных технологий в вузах МЧС является предоставление обучающимся возможности освоения образовательных программ непосредственно по месту жительства (прохождения службы). Таким образом, ДОТ позволяют адаптировать процесс обучения к профессиональной деятельности действующих сотрудников МЧС России [1].

Другим важным направлением использования ДОТ является организация подготовки к вступительным испытаниям. Преимущества в формате online для абитуриентов заключается в возможности выбрать удобное время и место для обучения, а также собственный темп освоения курса; возможность готовиться к поступлению с преподавателями университета. На подготовительных курсах в формате online абитуриент развивает необходимые навыки самообучения, что служит дополнительным критерием для его принятия на выбранную образовательную программу.

В Санкт-Петербургском университете ГПС МЧС России подготовительные online-курсы разрабатываются лабораторией электронного обучения и дистанционных образовательных технологий.

Для регламентирования порядка работы подготовительных курсов подготовлены два локальных акта: «Стандарт организации – Положение о подготовительных курсах» и «Дополнительные общеразвивающие программы» (ДОП) по высшей математике и математике.

Главная цель реализации ДОП заключается в восстановлении и формировании систематизированных знаний, умений и навыков в области

высшей математики и математики, необходимых для сдачи вступительных экзаменов.

Принципы построения (ДОП):

- применение современных образовательных технологий, инновационных методов обучения на основе массовых онлайн-курсов;
- возможность формирования индивидуальной траектории обучения;
- использование информационных и коммуникационных технологий, в том числе современных систем технологической поддержки процесса обучения, обеспечивающих комфортные условия для обучающихся, преподавателей;
- применение электронных образовательных ресурсов (дистанционное, электронное, комбинированное обучение).

В настоящее время курсы включают в себя набор видеолекций и конспектов с кратким изложением теоретических вопросов и подробным рассмотрением решения типовых практических примеров вступительного экзамена; большой банк тестовых заданий для самостоятельного решения с проверкой ответа и получением результата прохождения теста по каждой теме; итоговые тесты. Представлена возможность общения абитуриентов с преподавателем в формате форума вопросов и ответов.

Нормативная трудоемкость обучения по программе «Высшая математика», включая самостоятельную работу слушателей – 36 академических часов; длительность – 4 недели; недельная нагрузка – 9 часов.

Форма обучения – заочная с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий в объеме, предусмотренном учебно-тематическим планом.

В результате обучения слушатели восстанавливают основные понятия, методы и теоремы курса высшей математики для решения тестовых заданий на вступительном экзамене. Восполняют основные знания по высшей математике для освоения магистерской программы по направлениям подготовки 27.04.03 «Системный анализ и управление», 20.04.01 «Техносферная безопасность».

Курс позволяет слушателям восполнить некоторые компетенции:

- способность обладать математической культурой как частью профессиональной и общечеловеческой культуры;
- способность проводить доказательства утверждений как составляющей когнитивной и коммуникативной функции;
- способность анализировать, интерпретировать и представлять результаты исследований;
- способность использовать аппарат высшей математики для описания моделей различных явлений и процессов в области пожарной безопасности;

– способность использовать аппарат высшей математики при выборе методов (систем) защиты человека и среды обитания, ликвидации чрезвычайных ситуаций применительно к конкретным условиям.

Нормативная трудоемкость обучения по программе «Математика», включая самостоятельную работу слушателей – 28 академических часов; длительность – 4 недели; недельная нагрузка – 7 часов.

Главная цель online-курса по математике заключается в формировании систематизированных знаний, умений и навыков в области элементарной математики, необходимых для сдачи вступительного экзамена в письменной форме.

Курс включает в себя все основные разделы дисциплины «Математика» для подготовки письменного вступительного экзамена на очную и заочную формы обучения по специальностям и направлениям подготовки, реализуемым в университете. При разработке курса учитывались материалы вступительных испытаний прошлых лет, а также требования ФГОС ВО необходимых для освоения программ по всем направлениям подготовки.

Online-курс «Математика» позволяет овладеть знаниями, умениями и навыками, которые должны быть показаны абитуриентами при поступлении в Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России; восстановить основные понятия, формулы, методы и теоремы курса элементарной математики для решения практических заданий на вступительном экзамене; восполнить основные знания по элементарной математике для освоения программ ФГОС ВО по всем формам и направлениям обучения.

Электронные учебные курсы задают методику и технологию обучения, полностью определяют содержание программы, ход процесса обучения, процедуры оценки уровня достижения результатов обучения и за счет использования сервисов электронной информационно-образовательной среды обеспечивают достижение планируемых результатов обучения.

Дальнейшее развитие курсов связано с разработкой имитационных моделей и компьютерных тренажеров. Для объяснения наиболее сложных тем в университете два раза в месяц организуются вебинары, на которых обучающиеся могут задать вопросы в режиме реального времени.

Таким образом, опыт организации дистанционного обучения с использованием информационных технологий позволяет утверждать, что такая форма обучения дает положительный дидактический эффект и позволяет абитуриентам (обучающимся) лучше подготовиться к вступительным испытаниям (выездной сессии).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Information systems and processes in the analytical training of management scholars / V.S. Artamonov, A.Y. Ivanov, S.V. Sharapov, E.N. Trofimets, V.Ya. Trofimets // *Espacios*. 2017. Vol. 38, N 25. P. 18.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 330.4

**А. С. Андреев, Е. Ю. Лискина**

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина  
Россия, г. Рязань, e-mail: artem.andreev@inbox.ru, e.liskina@365.rsu.edu.ru

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ФАКТОРОВ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПОТЕНЦИАЛА НА ЭКОНОМИЧЕСКОЕ РАЗВИТИЕ РЕГИОНОВ РОССИИ

*В статье определены статистически значимые факторы производственного потенциала региона, влияющие на валовой региональный продукт на душу населения и на величину ввода основных фондов на душу населения.*

**Ключевые слова:** *эконометрическое моделирование, экономическое развитие, промышленный потенциал, множественная регрессия, множественная корреляция.*

**A. S. Andreev, E. Ju. Liskina**

S.A. Esenin Ryazan State University  
Russia, Ryazan, e-mail: artem.andreev@inbox.ru, e.liskina@365.rsu.edu.ru

## MODELING OF INFLUENCE OF THE MANUFACTURING POTENTIAL'S FACTORS ON THE ECONOMIC DEVELOPMENT OF RUSSIA REGIONS

*In this paper we have identified statistically significant factors of the region's manufacturing potential, influence the gross regional product per capita, the amount of input of fixed assets per capita.*

**Keywords:** *econometric modeling, economic development, manufacturing potential, multiple regression, multiple correlation.*

### **Введение**

Эконометрическому моделированию социально-экономического развития Российской Федерации посвящено достаточно большое количество работ [1–4]. Они объединены общей идеей – определить показатели, отвечающие за социально-экономическое развитие регионов, выявить экзогенные факторы, влияющие на выбранные показатели, выявить вид зависимости и идентифицировать коэффициенты модели. В работах [1, 4] для этого используется метод анализа панельных данных, в исследовании [3] – построена система уравнений с распределёнными лагами и выполнен

анализ панельных данных, в статье [2] используется сочетание методов кластерного анализа и регрессионного анализа. В качестве эндогенного показателя во всех работах выбран валовой региональный продукт (ВРП) или ВРП на душу населения, в работе [3] к ВРП добавлено ещё несколько эндогенных показателей. Перечисленные работы отличаются наборами экзогенных факторов.

Однако построение моделей социально-экономического развития регионов России не теряет актуальности, так как, во-первых, меняется экономика страны; а во-вторых, сложность и многообразие экономических процессов позволяет исследовать влияние различных факторов, отличающихся от используемых в работах [1, 4], на показатели социально-экономического развития.

Экономическое развитие региона определяется уровнем его промышленного потенциала [5]. Промышленный потенциал региона состоит из производственного, финансового, инфраструктурного и человеческого потенциалов. Цель настоящей работы – оценка влияния факторов производственного потенциала на величину ВРП на душу населения и на величину ввода основных фондов обрабатывающих производств на душу населения.

**1. Постановка задачи.** В соответствии с анализом, проведённым в работах [5, 6], представим экзогенные факторы, определяющие производственный потенциал региона (табл. 1).

**Таблица 1. Факторы, определяющие производственный потенциал региона**

Обозначение переменной	Экономический показатель	Единица измерения
$X_1$	Стоимость основных фондов обрабатывающих производств на душу населения	Тыс. руб./ тыс. чел.
$X_2$	Доля организаций, выполнявших исследования и разработки в общей численности организаций	-
$X_3$	Фондоотдача обрабатывающих производств	-
$X_4$	Степень износа основных фондов обрабатывающих производств	%

В качестве эндогенных переменных примем следующие экономические показатели:

$Y_1$  – ВРП на душу населения (млн руб. / тыс. чел.),

$Y_2$  – величина ввода основных фондов обрабатывающих производств на душу населения (млн руб. / тыс. чел.).

ВРП на душу населения является одним из стандартных показателей

уровня социально-экономического развития региона. Величина ввода основных фондов обрабатывающих производств на душу населения отражает развитие обрабатывающей промышленности в регионе.

Задача исследования – выявить значимые и незначимые факторы производственного потенциала региона, а также проследить изменение значимых факторов за период времени с 2010 по 2016 год. Данный период времени был выбран как стабильный относительно состава федеральных округов (республика Крым и г. Севастополь не учитывались, так как данные по ним есть только с 2014 года).

Источником числовых данных являются статистические сборники [7, 8]. Вычисления выполнены с помощью пакета «Анализ данных» табличного процессора MSExcel на уровне значимости 0,05.

**2. Результаты исследования.** На первом этапе исследования для каждого года рассматриваемого периода были проанализированы диаграммы рассеяния и построены корреляционные матрицы признаков  $(X_i, Y_j)$ ,  $i = \overline{1; 4}$ ,  $j = \overline{1; 2}$ . Затем были оценены коэффициенты уравнения множественной линейной регрессии вида

$$Y_1 = a_0 + \sum_{i=1}^4 a_i X_i + \varepsilon_j, \quad t = \overline{2010; 2016}, \quad (1)$$

$$Y_1 = b_0 + \sum_{i=1}^4 b_i X_i + \varepsilon_j, \quad t = \overline{2010; 2016}, \quad (2)$$

оценена их значимость по  $t$ -критерию Стьюдента и вычислены величины  $R^2$  для уравнения регрессии каждого года.

На втором этапе на основе проведённого анализа было выявлено, что на переменную  $Y_1$  значимо влияют факторы  $X_1$  и  $X_3$ , а на переменную  $Y_2$  значимо влияют факторы  $X_1$  и  $X_4$ . В соответствии с этим были оценены коэффициенты следующих уравнений множественной линейной регрессии, оценена значимость коэффициентов этих уравнений и вычислены величины  $R^2$ :

$$Y_1 = a_0 + a_1 X_1 + a_3 X_3 + \varepsilon_j, \quad t = \overline{2010; 2016}, \quad (3)$$

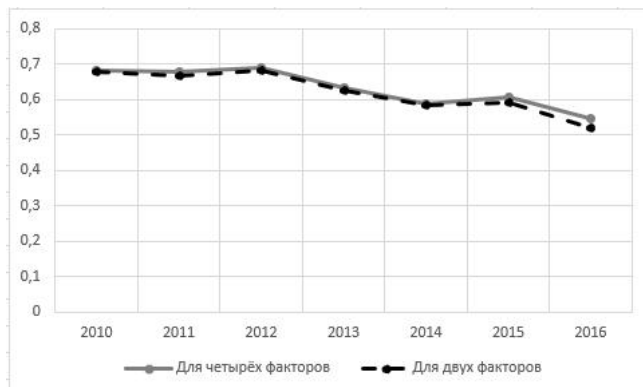
$$Y_2 = b_0 + b_1 X_1 + b_4 X_4 + \varepsilon_j, \quad t = \overline{2010; 2016}. \quad (4)$$

Динамика коэффициентов  $R^2$  для уравнений (1) и (3) представлена в таблице 2 и на рис. 1, а динамика коэффициентов  $R^2$  для уравнений (2) и (4) – в таблице 3 и на рис. 2.



**Таблица 2. Динамика коэффициентов  $R^2$  для уравнений (1) и (3)**

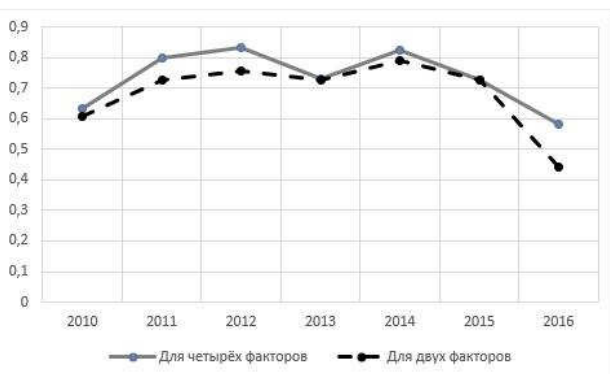
Год	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Уравнение (1)	0,681	0,678	0,688	0,631	0,589	0,606	0,546
Уравнение (3)	0,679	0,668	0,681	0,625	0,585	0,590	0,520



**Рис. 1. Динамика коэффициентов  $R^2$  для уравнений (1) и (3)**

**Таблица 3. Динамика коэффициентов  $R^2$  для уравнений (2) и (4)**

Год	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Уравнение (2)	0,631	0,797	0,832	0,731	0,824	0,726	0,584
Уравнение (4)	0,606	0,727	0,755	0,728	0,788	0,725	0,443



**Рис. 2. Динамика коэффициентов  $R^2$  для уравнений (2) и (4)**

## Выводы

Из 4-х рассмотренных факторов производственного потенциала на ВРП на душу населения значимо влияют стоимость основных фондов обрабатывающих производств на душу населения и фондоотдача. При этом величина  $R^2$  достаточно монотонно снижается в рассматриваемом промежутке времени. Этот факт можно объяснить тем, что усиливается влияние других факторов, не включённых в модель (1), на ВРП на душу населения. На величину ввода основных фондов на душу населения значимо влияют стоимость основных фондов обрабатывающих производств на душу населения и степень износа основных фондов обрабатывающих производств. При этом величина  $R^2$  ведет себя не монотонно, то есть в некоторые годы влияние на ввод основных фондов на душу населения оказывали факторы, не учтённые в модели (2).

В данной работе были рассмотрены только факторы производственного потенциала. В дальнейшем предполагается рассмотреть влияние на ВРП на душу населения и ввод основных фондов на душу населения факторов финансового, человеческого и инфраструктурного потенциалов, а затем построить модель, оценивающую региональные различия.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Латышева М.А.* Эконометрическое моделирование уровня социально-экономического развития регионов Российской Федерации [Электронный ресурс] // Управление большими системами. 2009. №27. С. 282–292. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ekonometricheskoe-modelirovanie-urovnya-sotsialno-ekonomicheskogo-razvitiya-regionov-rossiyskoy-federatsii> (дата обращения: 27.01.2019).
2. *Панкова С.В.* Моделирование влияния социально-экономических факторов на валовой региональный продукт [Электронный ресурс] / С.В. Панкова, А.П. Цыпин // Экономический анализ: теория и практика. 2015. № 45 (444). С. 2–14. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/modelirovanie-vliyaniya-sotsialno-ekonomicheskikh-faktorov-na-valovoy-regionalnyy-produkt> (дата обращения: 27.01.2019).
3. *Постников Е.А.* Макроэкономическое моделирование развития Российской Федерации [Электронный ресурс] / Е.А. Постников, А.С. Сергеева // Национальные интересы: приоритеты и безопасность. 2011. № 23. С. 13–20. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/makroekonomicheskoe-modelirovanie-razvitiya-rossiyskoy-federatsii> (дата обращения: 27.01.2019).
4. *Постников Е.А.* Эконометрическое моделирование развития регионов России на основе панельных данных [Электронный ресурс] // Управление в современных системах. 2016. № 2 (9). С. 3–12. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ekonometricheskoe-modelirovanie-razvitiya-regionov-rossii-na-osnove-panelnyh-dannyh> (дата обращения: 27.01.2019).
5. *Ларионов А.О.* Оценка промышленного потенциала региона // Проблемы развития территорий. 2015. Вып. 2 (78). С. 45–61.

6. *Смирнова Т.Г.* Оценка промышленного потенциала региона (на примере Вологодской области) [Электронный ресурс] // Современные научные исследования и инновации. 2012. № 12. URL: <http://web.snauka.ru/issues/2012/12/19140> (дата обращения: 23.09.2018).
7. Регионы России. Социально-экономические показатели: стат. сб. 2011–2017 гг. [Электронный ресурс] / Федеральная служба гос. статистики. URL: [http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat\\_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc\\_1138623506156](http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1138623506156) (дата обращения 18.09.2018 г.).
8. Российский статистический ежегодник: стат. сб. 2018 г. [Электронный ресурс] / Федеральная служба гос. статистики. URL: [http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat\\_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc\\_1135087342078](http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1135087342078) (дата обращения 12.01.2019 г.).

УДК 624.072

**А. Л. Балushкин**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, [balushkinal@ystu.ru](mailto:balushkinal@ystu.ru)

## **ОСОБЕННОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЦЕПЛЕНИЯ В РАСЧЕТАХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ РЕЖИМНЫХ НАГРУЖЕНИЯХ**

*Обоснована актуальность расчетов ЖБК на действие повторных нагрузжений с учетом разгрузки. Представлены особенности расчетной модели составного стержня при выполнении расчетов с учетом режимности нагружения. Даны рекомендации по оценке жесткости сцепления на этапе разгрузки железобетонного элемента.*

**Ключевые слова:** железобетонный стержень, режимные нагружения, жесткость сцепления.

**A. L. Balushkin**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, *e-mail:* [balushkinal@ystu.ru](mailto:balushkinal@ystu.ru)

## **FEATURES OF THE DETERMINATION OF THE DEFORMATION CHARACTERISTICS OF BOND IN THE CALCULATIONS OF REINFORCED CONCRETE BAR STRUCTURES UNDER REGIME LOADS**

*The relevance of calculations of reinforced concrete structures for the effect of repeated loads, taking into account unloading, is substantiated. The features of the computational model of a built-up bar are presented when performing calculations taking into account the loading mode. Recommendations on the evaluation of the bond stiffness at the stage of unloading of a reinforced concrete element are given.*

**Keywords:** reinforced concrete bar, regime loadings, bond stiffness.

Работа целого ряда несущих железобетонных конструкций связана с восприятием знакопеременных силовых либо деформационных воздействий. Часто подвергаются таким воздействиям конструкции зданий и сооружений, возводимые в сложных инженерно-геологических условиях. Кроме этого, существует целый ряд железобетонных конструкций, в которых в процессе их жизненного цикла возможно образование начальных трещин, располагающихся в зонах, в которых при эксплуатации действуют сжимающие напряжения. Расчеты ЖБК с учетом режимов нагружения актуальны как для проектируемых, возводимых вновь конструкций, так и для эксплуатируемых объектов при их реконструкции [3]. При не многократных повторных воздействиях возникают эффекты, которые существенно искажают характер напряженно-деформированного состояния (НДС) в сечении элемента по сравнению с однократным нагружением, осуществленным с такой же интенсивностью.

В условиях режимных нагружений эксплуатируются:

- ленточные фундаменты каркасных и бескаркасных зданий, возведенные на слабых и просадочных грунтах, а также при действии на грунтовое основание низких температур;
- неразрезные балки перекрытий каркасных зданий при осадке опор;
- преднапряженные конструкции при расчетах в стадии изготовления (транспортировки, монтажа) и эксплуатации;
- крайние колонны крановых эстакад;
- стены емкостных сооружений прямоугольной формы;
- элементы каркасных зданий с учетом последовательности возведения каркаса, а также при догружении горизонтальной нагрузкой (ветер, сейсмика);
- лотковые элементы подземных каналов;
- элементы железобетонных конструкций при усилении;

Для всех вышеуказанных конструкций предварительно необходимо решать задачу по оценке начального характера НДС. Затем, вследствие изменения параметров нагрузочного эффекта, в некоторых частях конструкции реализуется разгрузка. Расчетная схема сечения, рассматриваемого элемента, изменяется, возобновляется режим нагружения, как правило, с увеличением интенсивности внешних силовых факторов. Далее расчетная схема может меняться еще раз, что может сопровождаться следующим этапом разгрузки.

Последовательность выполнения расчетной процедуры для конструкции при режимном нагружении описана в работе [1] при усилении железобетонной балки способом наращивания. В данной работе даются рекомендации по определению жесткости связей сдвига при разгрузке и последующем нагружении составного стержня.

При режимном нагружении этапу повторного квазистатического нагружения предшествует этап разгрузки. Разгрузка (как и нагружение) может быть активной, когда внешние силовые факторы уменьшаются - это мягкий режим разгрузки. Жесткий режим разгрузки проявляется в случае проявления факторов вынужденного деформирования от действия температуры, усадки или ползучести бетона и др.

Для решения задач прогнозирования НДС ЖБК, работающих в условиях режимных нагружений, следует применять модели, в которых используются параметры, учитывающие особенности контактного взаимодействия между арматурой и бетоном – параметры сцепления.

Для описания свойств бетона и арматуры, подвергающихся режимным нагружениям, используются особые подходы при нормировании диаграмм  $\sigma - \varepsilon$ . Этому вопросу, применительно к бетону значительное внимание уделено в работе Н.И. Карпенко [4], аналогичные вопросы для арматуры отражены в работе С.А. Мадатяна [5]. Проблема нормирования параметров сцепления, особенно для этапов разгрузки, в литературе отражена недостаточно. Данный вопрос нашел отражение в работе М.М. Холмянского [7]. Поэтому весьма актуально получить простые и экспериментально подтвержденные зависимости для нормирования параметров сцепления при решении задач расчета ЖБК в условиях режимных нагружений.

В расчетах ЖБК используется модель составного стержня. Основные положения данной модели представлены в работе [1].

Стержень состоит из бетонной ветви и гибких дискретных арматурных ветвей, расположенных в периферийных зонах бетонной ветви, работающих только на растяжение –  $A_{s2}$  или сжатие –  $A_{s1}$ . Совместная работа ветвей в единой конструкции обеспечивается сцеплением арматуры и бетона.

В расчетных моделях железобетонных элементов сцепление моделируется связями двух типов: поперечными связями, которые принимаются недеформируемыми - абсолютно жесткими и связями сдвига ( $G_{link,1}$ ,  $G_{link,2}$ ), передающими продольные деформации от бетона к арматуре и, наоборот (в сечениях с трещинами). Жесткость продольных связей может изменяться в диапазоне  $0 < G_{link} < \infty$ . Такой широкий интервал изменения параметра  $G_{link}$  имеет место для ординарных изгибаемых железобетонных элементов, армированных дискретной стержневой или проволочной арматурой.

Спецификой работы подобных конструкций является возникновение взаимных сдвигов по длине стержня между бетонной ветвью и арма-

турными ветвями:  $g_{s1}(x)$ ,  $g_{s2}(x)$ . При хорошем техническом состоянии бетона в сжатой зоне, на этапе предварительных расчетов, можно принять, что сцепление арматуры  $A_{s1}$  с бетоном абсолютно жесткое, тогда  $G_{link,1} \rightarrow \infty$ , и  $g_{s1}(x) = 0$ .

Для расчета на этапах нагружения и разгрузки используется дифференциальное уравнение, выражающее условие взаимности деформирования растянутой арматуры и бетонной ветви в шве:  $\varepsilon_{s2}(x) - \varepsilon_{bts}(x) = g'_{s2}(x)$ , которое вместе с граничными условиями определяет краевую задачу 1-го типа относительно неизвестного - сдвигающего усилия в шве  $T_{s2}(x)$  на этапе разгрузки.

На этапе разгрузки решается подобная краевая задача с определением изменения сдвигающего усилия в процессе разгрузки конструкции  $\Delta T_{s2} = T_{s2,0} - T_{s2,p}$ . Здесь  $T_{s2,0}$  - сдвигающее усилие при действующей нагрузке на первом этапе перед началом разгрузки;  $T_{s2,p}$  - сдвигающее усилие после разгрузки конструкции.

$$\left( T'_{s2}(x) G_{link,2}^{-1}(x) \right) - T_{s2}(x) \gamma_{s2}(x) = \Delta_2(x), \quad 0 < x < L, \quad T_{s2}(0) = T_{s2}(L) = 0, \quad (1)$$

$$\left( \Delta T'_{s2}(x) G_{link,p2}^{-1}(x) \right) - \Delta T_{s2}(x) \gamma_{s2}(x) = \Delta_{2,p}(x), \quad 0 < x < L, \quad \Delta T_{s2}(0) = \Delta T_{s2}(L) = 0, \quad (2)$$

$$\gamma_{s2}(x) = (E_{s2} A_{s2})^{-1} + A_e^{-1} + (m_0 - a_{s2})^2 B_e^{-1} F(N_{s2}, \rho^{-1}), \quad (3)$$

$$\Delta_2(x) = -M(x) B_e^{-1} (m_0 - a_{s2}) F(N_{s2}, \rho^{-1}), \quad (4)$$

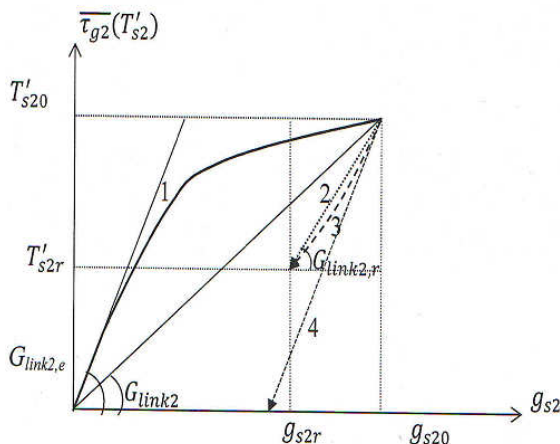
$$\Delta_{2,p}(x) = \Delta_{2,0} - \Delta_2 + T_{s2,0} (\gamma_{s2,0} - \gamma_{s2}). \quad (5)$$

В формулах (1) - (5):  $x$  - текущая координата по длине стержня;  $B_e$ ,  $A_e$  - соответственно упругая жесткость бетонной ветви при изгибе и жесткость при растяжении-сжатии;  $E_{s2}$  - модуль упругости арматуры  $A_{s2}$ ;  $F(N_{s2}; \rho^{-1})$  - функция нелинейности, учитывающая развитие неупругих деформаций и трещинообразование в бетонной ветви;  $M(x)$  - изгибающий момент в рассматриваемом сечении от внешней нагрузки;  $\rho^{-1}$  - кривизна в сечении бетонной ветви. Значения параметров  $\Delta_{2,0}$ ,  $T_{s2,0}$ ,  $\gamma_{s2,0}$  определено на первом этапе решения задачи, индекс «0» обозначает начало разгрузки.

Наиболее важный параметр в расчетах железобетонных элементов - жесткость продольных связей сдвига  $G_{link2}(x)$ . Данный параметр в целом определяет процесс образования и развития трещин - мест будущих возможных отказов. При режимных нагружениях жесткость связей сдвига следует рассчитывать как на этапе нагружения, так и при разгрузке и повторном нагружении (рис. 1). Взаимный сдвиг для растянутой арматуры

$A_{s2} - g_{s2}(x) = g_{b2}(x) + g_{w2}(x)$  определяется как сумма сдвига, локализующегося в зоне непосредственного контакта арматуры и бетона  $g_{b2}(x)$ , и сдвига  $g_{w2}(x)$ , проявляющегося на участке сечения в пределах  $-(m_0 - a_{s2}) \leq z \leq 0$  ( $z$  – текущая координата по оси  $Z$  поперечного сечения элемента, направленная вверх). В таком случае жесткость связей сдвига для составного стержня прямоугольного сечения  $G_{link,2}(x)$  определяется как

$$G_{link,2}^{-1} = G_{bond}^{-1} + G_w^{-1}. \quad (6)$$



**Рис. 1. Схема для расчета жесткости связей сдвига для растянутой арматурной ветви  $A_{s2}$ .**

Здесь  $\overline{\tau}_{g2}(x) = T'_{s2}(x)$ . Цифрами отмечено: 1 - зависимость « $\overline{\tau}_{g2} - g_{s2}$ » при нагружении; 2 - зависимость « $\overline{\tau}_{g2} - g_{s2}$ » для расчета жесткости связей сдвига при линейной разгрузке -  $G_{link2,r}$  по формуле (14); 3 - фактический характер зависимости « $\overline{\tau}_{g2} - g_{s2}$ » при разгрузке; 4 - разгрузка связей сдвига по схеме упругопластической системы с модулем  $G_{link2,e}$

Параметр  $G_w(x)$ - жесткость при продольном сдвиге участка бетонной стенки при упругой работе бетонной ветви определяется так:

$$G_w^{-1} = G_{we}^{-1} = (m_0 - a_{s2})/(bG_b), \quad (7)$$

где  $m_0$  – расстояние от нижней грани до центра тяжести сечения;  
 $a_{s2}$  – расстояние от нижней грани бетонной ветви до центра тяжести  $A_{s2}$ ;  
 $b$  – ширина сечения бетонной ветви;  
 $G_b$  – модуль сдвига бетона.

Для прямоугольного сечения с учетом возможного развития неупругих деформаций в растянутом бетоне:

$$G_w^{-1}(x) = G_{we}^{-1} + H(\varepsilon_{bts}; \varepsilon_{bt2})(f_2(x) - a_{s2})^2 (2G_b b d_2(x))^{-1}, \quad (8)$$

где  $\varepsilon_{bts} = (m - a_{s2})\rho^{-1}$  – относительная деформация растянутого бетона на уровне центра тяжести растянутой арматуры,

$$\varepsilon_{bt2} = R_{bt}/E_b, \quad d_2(x) = \varepsilon_{bt2}/\rho^{-1}(x), \quad N_0 = bhE_b;$$

$$\frac{f_2}{h} = 1 - \sqrt{1 - 2 \left( \frac{m_0}{h} - \frac{d_2}{h} - \frac{N_{s2}}{N_0 h \rho^{-1}} \right)}, \quad (9)$$

где  $R_{bt}$  – прочность бетона на растяжение;  $h$  – высота поперечного сечения бетонной ветви;  $N_{s2} = E_{s2} A_{s2} \varepsilon_{s2}$  – усилие в растянутой арматурной ветви.

Формулой (8) можно пользоваться для оценки компоненты  $G_w(x)$  и при разгрузке. В этом случае толщина пластического слоя растянутого бетона  $f_2$  принимается равной значению  $f_{20}$  в начале разгрузки. Высота растянутой зоны  $m$  для сечения без трещины при упругой работе бетона на сжатие оценивается при разгрузке по формуле

$$\frac{m}{h} = \frac{m_0}{h} + \left( 1 + \nu_r \left( \frac{\rho_0^{-1}}{\rho^{-1}} \right) \right) \frac{1}{2} \left( \frac{f_{20}}{h} \right)^2 - \frac{N_{s2}}{N_0 h \rho^{-1}}, \quad (10)$$

где  $\nu_r = \overline{E_{br}}/E_b$  – среднее значение коэффициента упругопластических деформаций при разгрузке растянутого бетона на участке  $-m \leq z \leq -(m - f_2)$ ;

$$\overline{E_{br}} = \frac{1}{f_2} \int_{-m}^{-(m-f_2)} \sqrt{E_{bs}(z)E_b} dz = \frac{2E_b}{1 + \sqrt{m/d_2}}; \quad (11)$$

$E_{bs} = E_b \frac{\varepsilon_{btr}}{\varepsilon_{btu}}$  – секущий модуль растянутого бетона при разгрузке;

$\varepsilon_{btr} = m\rho^{-1}$  – деформация крайних растянутых волокон бетона;

$\varepsilon_{btu}$  – предельная растяжимость бетона.

На этапе разгрузки толщина слоя упруго работающего бетона на растяжении  $d_2 = m - f_{20}$ .

Жесткость контакта между арматурой и бетоном (жесткость сцепления) при нагружении рассчитывается по формуле

$$G_{bond}^{-1} = t_{con,2}/(p_{s2} G_{con2}), \quad (12)$$

где  $t_{con}$ ,  $p_{s2}$  – параметры сцепления для  $A_{s2}$  соответственно: толщина контактной зоны, суммарный периметр сечений всех элементов арматурной ветви;

$G_{con2} = G_{con2e} = p_{s2} R_{bond}/g_e$  – условный начальный упругий модуль сцепления если  $g_{b2} \leq g_e$ ;



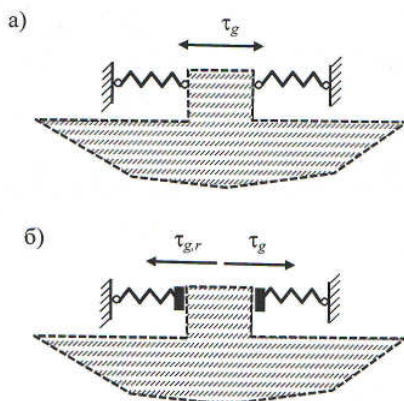
$R_{bond}$  – прочность сцепления, определяемая экспериментально или по данным СП 63.13330.2012 [6];

$g_e$  – смещения арматуры, характеризующие начало работы сцепления в пластической стадии. На основании экспериментальных данных, представленных в [7]  $g_e \leq 0.05$  мм.

Параметр  $G_{bond}$  будет уменьшаться при нагружении, если  $g_{s2}(x) > g_e$ , а также и при разгрузке.

Взаимодействие бетона и арматуры в зоне непосредственного контакта обеспечивается односторонними или двусторонними связями (рис. 2) [7].

По данным М.М. Холмянского [7] для стержневой арматуры характерны двусторонние связи, для гладкой стержневой и проволочной арматуры односторонние связи. Очевидно, что на этапе нагружения двусторонние связи будут создавать контакт с большей жесткостью сдвигу, чем односторонние связи. Вместе с тем тип связи сдвига определяется в основном на ветви разгрузки. Экспериментальные данные, полученные при испытаниях стержневой и проволочной арматуры, показывают, что при низком уровне нагружения сцепления, связи в зоне контакта между бетоном и арматурным элементом работают как двусторонние. С ростом нагрузки, с развитием значительных сдвигов в контактной зоне характер работы связей сдвига приближается к односторонним связям.



**Рис. 2. Типы связей сдвига в зависимости от способа взаимодействия арматуры и бетона:**

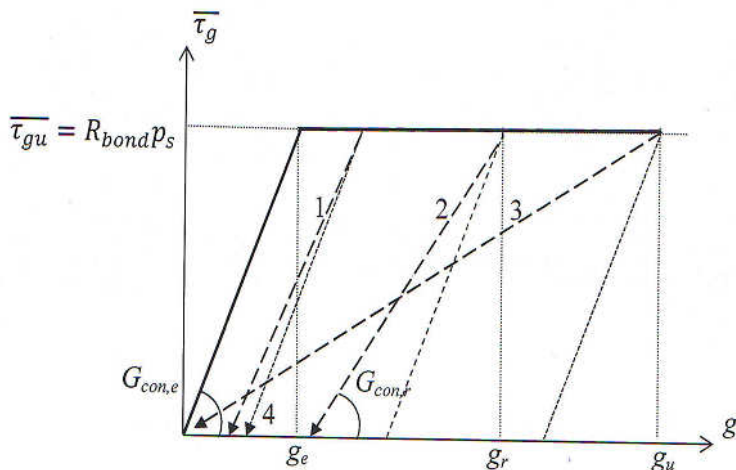
*a* - двусторонние связи сдвига; *б* - односторонние связи сдвига;

$\tau_{g,r}$  – напряжения сцепления на этапе разгрузки

Трансформация характера деформирования контактной зоны между арматурой и бетоном объясняется следующим эффектом [2]. Сразу после достижения внешней нагрузки определенного уровня, зависимость между

напряжениями сцепления  $\tau_g(x)$  и взаимными сдвигами в зоне непосредственного контакта  $g_b(x)$  или их приращениями ( $\Delta\tau_g = f(\Delta g_b)$ ) практически линейная. Через небольшой промежуток времени проявляется эффект приспособляемости механической системы – происходит релаксация напряжений сцепления  $\tau_g$ . Механизм релаксации напряжений проявляется в развитии пластических деформаций в бетонных выступах и уплотнением (смятием) бетона под выступами арматуры, что реализуется в значительной мере на ранних этапах деформирования контактной зоны (путь разгрузки с модулем  $G_{con,e}$ , рис. 3).

С ростом напряжений в контактной зоне, если  $\tau_g(x) > 0.5 R_{bond}$ , имеет место нарушение сплошности – появляются радиальные микротрещины, тогда последующая разгрузка будет осуществляться с модулем  $G_{con,s} = p_s \tau_g / g_b$ . Для реальных железобетонных элементов в процессе деформирования реализуются оба механизма релаксации одновременно, поэтому траектория разгрузки более сложная с переменным модулем разгрузки  $G_{con,r} \neq const$ .



**Рис. 3. Расчетная зависимость  $\bar{\tau}_g - g_b$  и траектории разгрузки сцепления при различных уровнях деформирования.**

Цифрами отмечены траектории разгрузки при различных типах связей:

- 1 - разгрузка при двусторонних связях сдвига после образования радиальных микротрещин;
- 2 - двусторонние связи сдвига при наличии системы радиальных и конических (кольцевых) микротрещин в зоне контакта;
- 3 - разгрузка с секущим модулем  $G_{con,s}$  при наличии микрповреждений в виде трещин;
- 4 - разгрузка сцепления при двусторонних связях при развитии пластических деформаций в бетоне контактной зоны при отсутствии трещин

Работу связей сдвига в условиях неупругих деформаций можно оценить, используя аппроксимацию реального закона сцепления «касательное напряжение – взаимный сдвиг  $\tau_g - g$ » диаграммой Прандтля. В таком случае для модуля разгрузки сцепления  $G_{con,r}$  имеет место зависимость, которая учитывает трансформацию механических свойств контакта арматуры и бетона в зависимости от интенсивности сдвига, достигнутой непосредственно перед разгрузкой  $g_r$ :

$$G_{con,r} = G_{con2e} \left( \frac{g_e}{g_r} \right)^{\frac{g_r - g_e}{g_u - g_e}} . \quad (13)$$

Здесь  $g_u$  – предельные смещения арматуры относительно бетона в зоне непосредственного контакта;

$g_r$  – деформация взаимного сдвига в зоне контакта арматуры и бетона, достигнутая перед этапом «разгрузки».

Определив модуль сцепления при разгрузке  $G_{con,r}$ , используя выражение (13), по формуле (12) получаем значение компоненты жесткости связей сдвига  $G_{bond}^{-1}$  и далее вычисляем жесткость связей сдвига при разгрузке  $G_{link,2r}$  по формуле (6).

Жесткость связей сдвига на этапе разгрузки  $G_{link,p2}$  можно также корректировать в процессе расчета после вычисления  $T_{s2}(x)$  и  $g_{s2}(x)$ ,

$$G_{link,p2} = \frac{T'_{s2,0} - T'_{s2,p}}{g_{s2,0} - g_{s2,p}} , \quad (14)$$

что соответствует закону разгрузки по линии 2 рис.1.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балушкин А.Л.* Особенности применения бимоментной теории для расчета армированных стержней // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2018. Вып. 13. С.116-122.
2. *Жижерин С.В.* Деформирование балки из повреждающегося материала при чистом изгибе / С.В. Жижерин, В.В. Стружанов // Математическое моделирование систем и процессов. 1999. №7. С. 20-27.
3. *Карпенко Н.И.* Расчет железобетонных стержневых конструкций с учетом режимов нагружения / Н.И. Карпенко, Т.А. Мухамедиев, Г.Р. Розенвассер, Л.М. Шварц // Строительная механика и расчет сооружений. 1988. №5. С.17-21.
4. *Карпенко Н.И.* Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. 416 с.
5. *Мадатян С.А.* Арматура железобетонных конструкций. М.: Воентехлит, 2000. 256 с.
6. СП 63.13330.2012. бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. М, 2012. 154 с.
7. *Холмянский М.М.* Контакт арматуры с бетоном. М.: Стройиздат, 1981. 184 с.

**А. Ю. Бацева, С. А. Бельман**

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина  
Россия, г. Рязань, e-mail: an\_batseva@mail.ru, s.belman@rsu.edu.ru

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭФФЕКТИВНОЙ ТРУДОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ УЧРЕЖДЕНИИ**

*В статье рассматривается задача линейного программирования для нахождения оптимального соотношения между рабочим временем учителя и размером его заработной платы. Производится анализ полученных результатов и построенной модели.*

**Ключевые слова:** педагогическая эргономика, задача линейного программирования, оптимальное решение.

**A. Yu. Batseva, S. A. Belman**

S.A. Yesenin Ryazan State University  
Russia, Ryazan, e-mail: an\_batseva@mail.ru, s.belman@rsu.edu.ru

## **MATHEMATICAL MODEL OF EFFECTIVE WORK IN AN EDUCATIONAL INSTITUTION**

*We consider the problem of linear programming for finding of an optimum ratio between working hours of the teacher and the amount of its salary. The analysis of the received results and the constructed model is made.*

**Keywords:** pedagogical ergonomics, linear programming, optimal solution.

В условиях современных образовательных учреждений одним из приоритетных направлений является развитие педагогического потенциала. Этому способствует применение принципов и методов педагогической эргономики в образовательном процессе.

Педагогическая эргономика возникла, как синтез эргономики – науки об оптимизации производительности труда системы, и педагогики. Данная наука призвана решить проблему оптимизации педагогической системы. Под педагогической системой в этом случае понимаются такие ее элементы, как ученик, учитель и учебная среда. Педагогическая эргономика исследует психофизиологические и трудовые возможности педагога и ученика для создания оптимальных условий их деятельности при минимальных затратах различных ресурсов в целях интенсификации образовательного процесса.

По сравнению с зарубежными странами педагогическая эргономика в России слабо развита. Основное внимание отечественные исследователи уделяют проблеме эргономики образовательного процесса с точки зрения учащегося и средств обучения, поэтому существует необходимость в анализе трудовой деятельности педагога как одного из важнейших элементов образовательного процесса.

Для эффективной трудовой деятельности педагогу необходимо найти оптимальное сочетание времени, которое он затрачивает на выполнение своих должностных обязанностей, и размера вознаграждения за его труд, т.е. заработной платы. Этот вопрос особенно актуален в профессиональной деятельности молодого педагога. В этой связи возникает проблема, какая математическая модель наиболее обоснованно позволит найти оптимальную продолжительность рабочего времени педагога, чтобы его заработная плата при этом максимизировалась?

Одним из эффективных математических методов принятия решений является математическое программирование. Математическое программирование базируется на методологических основах системного анализа. В случае, когда задача системного анализа сводится к нахождению оптимального решения, при котором функция цели достигает экстремума при заданных ограничениях ресурсов, применяется задача линейного программирования.

Предположим, что функция цели  $f(x)$  описывает взаимосвязь между заработной платой педагога и его рабочим временем, а ограничениями являются временные рамки для выполнения преподавателем различных функций.

Для построения задачи линейного программирования были использованы данные о средних размерах оплаты труда учителя средней школы за различные виды выполняемых работ в г. Рязань. В целях упрощения расчетов примем, что оплата труда учителя складывается из двух составляющих: базовой и премиальной. Под базовой составляющей оплаты труда учителей понимается вознаграждение за выполнение педагогом должностных обязанностей, в т.ч. ведение уроков и подготовка к ним, проверка тетрадей. Премиальная составляющая включает выплаты стимулирующего характера за выполнение учителем дополнительных функций: например, внеурочная деятельность.

Согласно действующему законодательству минимальное рабочее время учителя составляет 18 часов в неделю, максимальное – 36 часов в неделю [1]. Согласно решению Рязанской городской думы от 29 ноября 2010 года № 604-I минимальный оклад педагогических работников средней школы составляет 4 680 руб.

При проверке учителями тетрадей оплата за такой вид деятельности составляет:

- учителям начальных классов – 10% от количества часов русского языка и математики;

- учителям русского языка и литературы – 15% от часов русского языка 5-11 класс и 15% от часов литературы 8-11 классы;

- учителям математики – 10% от количества часов математики.

Предположим, что задача линейного программирования составляет для учителя математики, тогда оплата за такой вид деятельности учителю будет составлять 25 руб. в неделю.

ФГОС регламентирует максимально допустимый объем внеурочной деятельности за все время обучения по каждому уровню образования. Для основного общего образования объем внеурочной деятельности не должен превышать за 5 лет 1 750 часов [2]. В среднем учитель проводит 6 часов внеурочной деятельности в средней школе.

Средний еженедельный размер стимулирующей выплаты учителю за ведение внеурочной деятельности составляет 250 руб.

На основании вышеуказанных данных составим задачу линейного программирования для нахождения еженедельного оптимального рабочего времени молодого учителя математики средней школы в г. Рязань.

$$f(x) = 65x_1 + 25x_2 + 250x_3 \rightarrow \max. \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 36, \\ x_1 \geq 18, \\ x_2 \geq 1, \\ x_3 \leq 6, \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad (3)$$

где  $x_1$  – рабочее время учителя в неделю, которое он тратит на подготовку и ведение уроков, часов;  $x_2$  – рабочее время учителя в неделю, которое он тратит на проверку тетрадей, часов;  $x_3$  – рабочее время учителя в неделю, которое он тратит на внеурочную работу, часов.

Решая полученную задачу линейного программирования (1), (2), (3) симплекс-методом, найдем оптимальное решение:  $x_1 = 29$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 6$ . Таким образом, в г. Рязань молодому учителю математики желательно в неделю тратить 29 часов на подготовку и ведение уроков, 1 час на проверку тетрадей и 6 часов на внеурочную деятельность и тогда его заработная плата в неделю составит 3 410 руб.

Построенная задача линейного программирования имеет недостаток: учтено среднее время на выполнение учителем базовых функций; не

учитываются другие факторы, влияющие на оплату труда педагога: стаж работы педагога, надбавки за особенности работы, качество работы педагога и т.д. Для устранения выявленных недостатков необходимо детализировать в полученной модели базовые функции, а также учесть другие значимые факторы, тогда оптимальное решение будет вычислено наиболее точно.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Об образовании в Российской Федерации: Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ (ред. от 25.12.2018)
2. Федеральный Государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Минобрнауки России от 17.12.2010 № 1897 (ред. от 31.12.2015)

УДК 661.666.4

**Е. А. Гирба, О. Н. Кorableва**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, *e-mail: korablevaon@ystu.ru*

## **КОЭФФИЦИЕНТ ИНЖЕКЦИИ ЖИДКОГАЗОВЫХ ИНЖЕКЦИОННЫХ АППАРАТОВ**

*Экспериментальным путем получены зависимости для определения коэффициента инжекции жидкогазового инжекционного аппарата.*

**Ключевые слова:** диспергирование потока, механическая форсунка, инжекционный аппарат, коэффициент инжекции, инжекционный коэффициент полезного действия.

**E. A. Girba, O. N. Korableva**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, *e-mail: korablevaon@ystu.ru*

## **COEFFICIENT OF THE INJECTION OF LIQUID-GAS INJECTION DEVICES**

*We obtained experimentally dependencies to determine the injection coefficient of a liquid-gas injection apparatus.*

**Keywords:** dispersion flow, mechanical nozzle, injection apparatus, injection coefficient, injection efficiency.

В нефтеперерабатывающей, нефтехимической и химической промышленности находят широкое применение аппараты с диспергированием потока рабочей жидкости. Для диспергирования жидкости, подаваемой в аппарат, часто используют механические форсунки. За счет диспергирования жидкости происходит увеличение поверхности контакта взаимодействующих фаз, приводящее к интенсификации процессов тепло- и массообмена [1–3].

Такой способ диспергирования жидкости используется в жидкогазовых инъекционных аппаратах.

Принципиальная схема жидкогазового инъекционного аппарата представлена на рис. 1.

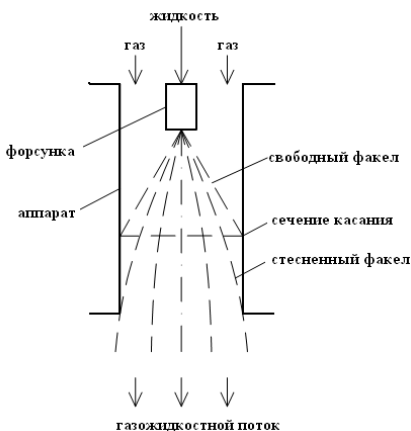


Рис. 1. Схема жидкогазового инъекционного аппарата

Аппарат включает в себя два основных элемента – цилиндрический корпус и форсунку для подачи жидкости в аппарат. Аппарат прост по конструкции и надежен в работе.

Жидкость, подаваемая под давлением, впрыскивается в аппарат с большой скоростью. Вследствие разности скоростей фазы обмениваются энергией. Жидкогазовые инъекционные аппараты относят к одному из типов струйных аппаратов. В результате взаимодействия потоков в аппарате жидкость дробится на капли, а также увеличивается скорость газового потока (газ увлекается жидкостью - инжектируется).

При использовании центробежноструйных форсунок вылетающие капли жидкости образуют конус, который называют факелом жидкости. Образовавшийся факел жидкости перекрывает сечение аппарата на некотором расстоянии от форсунки, а далее капли движутся внутри цилиндрического корпуса. Сечение в месте касания делит факел на свободный и стесненный.



Инжекция газового потока жидкостью приводит к снижению гидравлического сопротивления аппарата, а в некоторых случаях уменьшению его до нуля или даже созданию дополнительной тяги газа через аппарат.

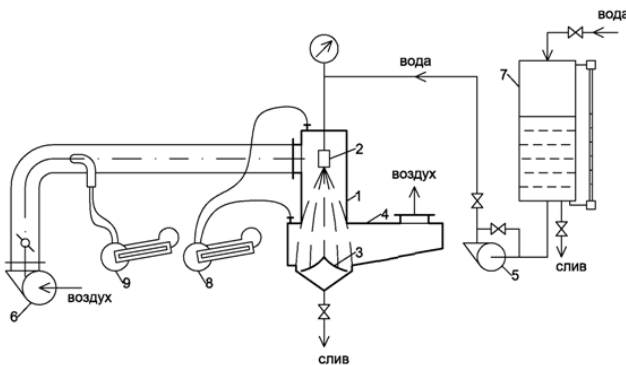
Таким образом, жидкогазовые инжекционные аппараты имеют не только высокоразвитую поверхность раздела фаз, но и фактически не создают гидравлического сопротивления потоку газа. Они просты по конструкции и надежны в работе.

При гидродинамическом расчете аппарата основным определяемым параметром является объемный коэффициент инжекции  $U_{инж}$ , он характеризует отношение объемного расхода газа  $V_r$  ( $\text{м}^3/\text{с}$ ) к объемному расходу жидкости  $V_{ж}$  ( $\text{м}^3/\text{с}$ ) через аппарат:

$$U_{инж} = \frac{V_r}{V_{ж}}$$

Максимальное значение объемного коэффициента инжекции имеет место в сечении касания стенок аппарата. При теоретическом определении максимального коэффициента инжекции используется методика, в основе которой лежит система нелинейных дифференциальных уравнений гидродинамики, решаемых численными методами, в соответствии с чем теоретическое определение максимального коэффициента инжекции является довольно трудоемкой задачей

Целью работы являлось получение зависимостей для определения максимального коэффициента инжекции жидкогазового инжекционного аппарата с помощью данных, полученных экспериментальным путем. Экспериментальные исследования проводили на установке, представленной на рис. 2.



**Рис. 2. Схема экспериментальной установки:**

- 1 – корпус аппарата; 2 – форсунка; 3 – отбойник; 4 – сепаратор;  
5 – насос; 6 – вентилятор; 7 – мерная емкость; 8,9 – тягонапоромеры

Для распыления жидкости в аппарате использовались цельнофакельные форсунки ВТИ с диаметром сопла от 2 до 6 мм. Давление воды перед форсунками варьировалось в пределах от 1 до 10 кгс/см<sup>2</sup>. Диаметр корпуса аппарата составлял 250 мм. Расход газа в опытах изменялся от 110 до 540 м<sup>3</sup>/ч, коэффициент инжекции от 120 до 1590.

В результате анализа опытных данных было установлено, что для системы вода-воздух в пределах варьируемых параметров эксперимента при использовании форсунок ВТИ, максимальный коэффициент инжекции зависел только от соотношения диаметров цилиндрической части аппарата  $D_{\text{Ап}}$  и соплового отверстия форсунки  $d_{\text{ф}}$  (табл. 1).

**Таблица 1. Опытные данные**

Диаметр соплового отверстия форсунки, мм	2	3	4	5	6
Опытное значение максимального коэффициента инжекции	1310-1320	760-770	525-530	385-390	305-310

Для аппроксимации опытных данных использовали степенную зависимость вида  $y = A \cdot x^n$ . Логарифмируя данную зависимость, получим

$$\ln y = n \cdot \ln x + \ln A,$$

т.е. в логарифмических координатах последнее уравнение является уравнением прямой. Методом наименьших квадратов получаем численные значения коэффициента  $A = 2,45$  и показателя степени  $n = 1,3$ .

Таким образом, формула для расчета максимального коэффициента инжекции имеет вид

$$U_{\text{инж}}^{\text{max}} = 2,45 \left( \frac{D_{\text{Ап}}}{d_{\text{ф}}} \right)^{1,3}.$$

Она позволяет подбирать диаметры цилиндрической части аппарата и сопла форсунки для достижения заданного максимального коэффициента инжекции.

Инжекционный коэффициент полезного действия  $\eta$ , учитывающий долю кинетической энергии жидкости, идущую на транспортирование газа через аппарат, можно рассчитать по формуле

$$\eta = \frac{N_{\text{г}}}{N_{\text{ж}}} = \frac{G_{\text{г}} \cdot v_{\text{г}}^2}{G_{\text{ж}} \cdot v_{\text{ж}}^2} = U_{\text{инж}}^{\text{max}} \frac{\rho_{\text{г}}}{\rho_{\text{ж}}} \left( \frac{v_{\text{г}}}{v_{\text{ж}}} \right)^2,$$

где  $N_{\text{г}}$  и  $N_{\text{ж}}$  - мощности газового и жидкостного потоков;

$G_{\text{г}}$  и  $G_{\text{ж}}$  - массовые расходы газа и жидкости, кг/с;

$\rho_{\text{г}}$  и  $\rho_{\text{ж}}$  - плотности газа и жидкости, кг/м<sup>3</sup>;

$v_r$  - скорость газа в сечении касания;

$v_{ж}$  - скорость жидкости на срезе сопла форсунки, м/с.

Используя последнее равенство и выразив скорости жидкости и газа через их расходы и диаметры цилиндрической части аппарата и отверстия сопла форсунки, получим для определения инжекционного коэффициента полезного действия  $\eta$  следующую формулу:

$$\eta = 14,7 \frac{\rho_r}{\rho_{ж}} \left( \frac{D_{АП}}{d_{\Phi}} \right)^{0,1}.$$

Экспериментальные исследования по определению инжекционного коэффициента полезного действия показали, что он увеличивается с ростом  $U_{инж}^{max}$ , что вероятней всего связано с влиянием размеров капель жидкости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Касаткин А. Г.* Основные процессы и аппараты химической технологии. 15-е изд. М.: Альянс, 2009. 759 с.
2. *Пажи Д.Г.* Основы техники распыливания жидкостей / Д.Г. Пажи, В.С. Галустов. М.: Химия, 1984. 86 с.
3. Пат. на полезную модель 152794 Российская Федерация, МПК В01F 3/04. Смесительное устройство для системы газ-жидкость / В.К. Леонтьев, О.Н. Кораблева. заявл. 15.04.2014; Бюл. № 17. Оpubл. 20.06.2015.

УДК 51-74

**А. В. Гусаров, Н. И. Гусарова**

Рыбинский государственный авиационный технический университет  
им. П. А. Соловьева

Россия, г. Рыбинск, e-mail: [alvgus@mail.ru](mailto:alvgus@mail.ru), [gusarova-73@mail.ru](mailto:gusarova-73@mail.ru)

## СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКА ОТРАЖЕННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

*В статье рассматривается математическая модель, описывающая процесс распределения потока электронов, отраженных от поверхности расплавленного материала и попадающих на коллекторы электронов, расположенные в чувствительном элементе датчика положения электронного луча. В модели учтено влияние неупругого отражения электронов, возникающее в электронных пучках высокой плотности.*

**Ключевые слова:** математическая модель, поток отраженных электронов, элементарная площадка, пучок высокой плотности, численное интегрирование, чувствительный элемент, коллектор электронов.

## A. V. Gusarov, N. I. Gusarova

P. A. Solovyov Rybinsk State University of Aviation Technology  
Russia, Rybinsk, e-mail: *alvgus@mail.ru, gusarova-73@mail.ru*

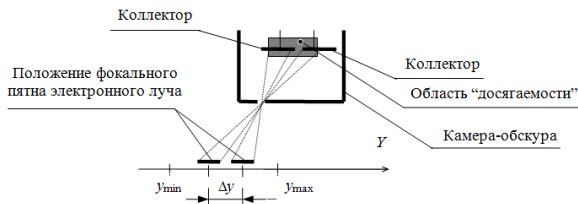
### REFLECTED ELECTRONS FLOW DISTRIBUTION MATHEMATICAL MODEL PERFECTION

*The article deals with a mathematical model that describes the process of distribution of the flow of electrons reflected from the surface of the molten material and falling on electronic collectors located in the sensing element of the electron beam position sensor. The model takes into account the influence of inelastic electron reflection occurring in high-density electron beams.*

**Keywords:** *mathematical model, flux of reflected electrons, elementary area, beam of high density, numerical integration, sensing element, collector of electrons.*

Нанесение тонких пленок методом электронно-лучевого испарения материала в высоком вакууме из водоохлаждаемого тигля позволяет получать высококачественные изделия для различных условий эксплуатации. Параметры пленок и, что весьма важно, воспроизводимость параметров, зависят от стабильности условий нанесения пленок. Электронно-лучевой испаритель вследствие своих конструктивных особенностей (наличие источника высокого напряжения в несколько киловольт, накальный катод, деформируемый при нагреве и пр.) вносит в процесс получения пленок значительную нестабильность [1]. Уменьшить влияние нестабильности электронно-лучевого испарителя на качество получаемых пленок можно путем регулирования его параметров, одним из которых является стабильность положения источника нагрева (в данном случае – электронного луча) в зоне испарения. Для этого был предложен метод контроля положения электронного луча в испарителе, основанный на использовании потока отраженных электронов с поверхности испаряемого материала [2, 3]. В соответствии с этим методом в вакуумной камере размещается чувствительный элемент датчика положения электронного луча [3], который представляет собой камеру-обскуру с расположенными внутри нее коллекторами отраженных электронов (рис. 1).

**Рис. 1. Чувствительный элемент датчика с коллекторами отраженных электронов**



При практической реализации данного метода необходимо задать координаты в трехмерной области внутри вакуумной камеры, в которой будет размещен чувствительный элемент. Кроме того, необходимо иметь линейную зависимость выходного сигнала датчика от положения электронного луча в пределах некоторой области  $[y_{\min}, y_{\max}]$ . За пределами этой области характеристика имеет вид «насыщение». Для этого используется математическая модель, описывающая распределение потока отраженных электронов по коллекторам, установленным внутри чувствительного элемента [4, 5]. Однако недавно проведенные эксперименты показали, что при использовании электронных лучей высокой плотности (свыше  $0,1 \text{ А/мм}^2$ ) математическая модель не всегда адекватно описывает распределение потока отраженных электронов по коллекторам, расположенным внутри чувствительного элемента. Это привело к необходимости усовершенствовать математическую модель.

При расчете распределения потока отраженных электронов по коллекторам были использованы следующие допущения:

- при нанесении покрытий в высоком вакууме взаимодействием между паровым потоком и электронами можно пренебречь, как и взаимодействием между электронами [1];

- вылетевшие из мишени отраженные электроны движутся прямолинейно, их угловое распределение определяется по закону косинуса, а угол вылета – в соответствии с законами геометрической оптики [6];

- электроны, достигшие внутренней поверхности стенок камеры-обскуры, не учитываются при расчете, так как их влияние можно минимизировать при разработке конструкции чувствительного элемента, например, покрыв внутреннюю поверхность чувствительного элемента сажей, имеющей минимальное значение коэффициента вторичной эмиссии.

- отсутствует явление третичной электронной эмиссии с поверхности коллектора, поэтому все вторичные электроны, достигающие коллектора, участвуют в образовании коллекторного тока;

- поверхность коллектора является плоской и расположена перпендикулярно проходящей через ее центр продольной оси симметрии чувствительного элемента;

- толщина стенок камеры-обскуры не учитывается, так как при реальных соотношениях диаметра отверстия и толщины стенок дифракцией электронов на стенках отверстия можно пренебречь.

В результате проведенных экспериментов было получено, что третье допущение не влияет на адекватность модели, а первые два – влияют. При этом взаимодействие электронов с потоком пара (см. первое допущение) приводит к изменению их траекторий, в результате часть электронов либо вообще не попадает внутрь камеры-обскуры, либо попадает не на тот коллектор, на который они должны были попасть в соответствии

с законами геометрической оптики. Кроме того, при применении лучей электронов высокой интенсивности происходит искривление расплавленной поверхности – в высоком вакууме она становится выпуклой. Эти обстоятельства и были учтены в усовершенствованной модели распределения потока отраженных электронов.

Непосредственное нахождение потока отраженных электронов  $I_e$  в общем случае можно выполнить по формуле

$$I_e = \iiint_{\Omega} \cos \theta \cdot r^2 \cdot \sin \theta d\varphi d\theta dr, \quad (1)$$

где  $\cos \theta$  – функция распределения потока отраженных электронов;  
 $r^2 \cdot \sin \theta d\varphi d\theta dr$  – элемент сферической поверхности.

Однако в данном случае элемент источник отраженных электронов не является точечным вследствие относительно большого размера фокального пятна электронного луча, поэтому необходимо просуммировать вклады, создаваемые всеми элементарными площадками на поверхности фокального пятна.

При разработке имитационной математической модели поверхность фокального пятна электронного пучка покрывается сеткой с малым шагом, которая условно разбивает поверхность фокального пятна на элементарные площадки, в пределах которых плотность первичного тока луча можно считать постоянной (рис. 2).

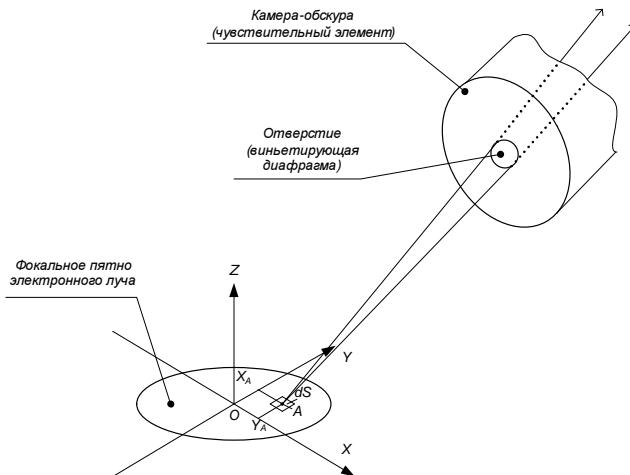
Получим имитационную модель для потока отраженных электронов, формируемого из потока электронов, попадающих на элементарную площадку  $S$ , в относительных, а не в абсолютных единицах. Это более удобно, так как на выходе датчика положения электронного луча формируется нормированный позиционный сигнал в диапазоне от  $-1$  до  $+1$ . Считаем, что на фокальное пятно электронного луча попадает единичный поток первичных электронов луча. Попадая на поверхность фокального пятна, часть электронов отражается, а другая часть теряет свою энергию и не участвует в формировании потока отраженных электронов.

Энергия луча и плотность тока первичного луча в пределах фокального пятна обычно распределены по нормальному закону, поэтому для каждой элементарной площадки  $S$  необходимо рассчитать коэффициент  $K_{Norm}(x_S, y_S)$ , учитывающий нормальное распределение плотности тока по поверхности фокального пятна луча. Значение коэффициента  $K_{Norm}(x_S, y_S)$  определяется по формуле

$$K_{Norm}(x_S, y_S) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y} \exp \frac{1}{2} \left( \left( x_S / \sigma_x \right)^2 + \left( y_S / \sigma_y \right)^2 \right), \quad (2)$$

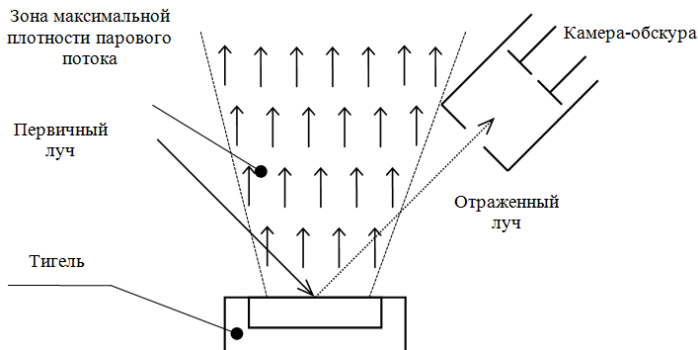
где  $\sigma_x, \sigma_y$  – средние квадратичные отклонения закона распределения плот-

ности тока по поверхности фокального пятна;  $x_S, y_S$  – координаты центра элементарной площадки  $S$ .



**Рис. 2.** К определению элементарного потока отраженных электронов с площадки  $S$  на поверхности фокального пятна

При высокой плотности парового потока (рис. 3) часть первичных электронов взаимодействует с атомами парового потока и изменяет траекторию движения (прямолинейную или по дуге окружности), тем самым формируя поток отраженных электронов с другими параметрами. Поэтому для каждой элементарной площадки  $S$  необходимо рассчитать коэффициент  $K_{Vap}(x_S, y_S)$ , учитывающий взаимодействие первичных электронов с атомами парового потока.



**Рис. 3.** Взаимодействие электронов с атомами парового потока

Кроме того, часть отраженных электронов взаимодействует с атомами парового потока и не достигает отверстия в камере-обскуре, тем самым не принимая участия в формировании нормированного позиционного сигнала. Поэтому для каждой элементарной площадки  $S$  необходимо рассчитать коэффициент  $K_{Rf}(x_S, y_S)$ , учитывающий взаимодействие отраженных электронов с атомами парового потока.

Значение коэффициента  $K_{Vap}(x_S, y_S)$  пока определяется экспериментально путем измерения тока, протекающего в цепи единственного коллектора в виде круга, помещенного в камеру-обскуру. Проведенные на электронно-лучевой установке УВН-75Р-1 эксперименты по испарению алюминия показали, что  $K_{Vap}(x_S, y_S) = (0,8 \div 0,95) \cdot K_{Norm}(x_S, y_S)$  в диапазоне ускоряющих напряжений от 4 до 7 кВ.

Значение коэффициента  $K_{Rf}(x_S, y_S)$  пока определяется экспериментально путем измерения тока, протекающего в цепи единственного коллектора в виде круга, помещенного в камеру-обскуру. Проведенные на электронно-лучевой установке УВН-75Р-1 эксперименты по испарению алюминия показали, что  $K_{Rf}(x_S, y_S) = (0,55 \div 0,75) \cdot K_{Norm}(x_S, y_S)$  в диапазоне ускоряющих напряжений от 4 до 7 кВ. Дальнейшей целью исследования является получение выражения, по которому можно будет рассчитать значения  $K_{Vap}(x_S, y_S)$  и  $K_{Rf}(x_S, y_S)$ , в том числе и в более широком диапазоне ускоряющих напряжений.

Формула для расчета потока отраженных электронов  $I_k$  с поверхности фокального пятна электронного луча через  $k$ -й коллектор отраженных электронов имеет вид

$$I_k = \sum_{i=1}^n K_{Norm}(x_S, y_S) \cdot K_{Vap}(x_S, y_S) \cdot K_{Rf}(x_S, y_S) \cdot (\varphi_{2S} - \varphi_{1S}) \cdot (\cos \theta_{1S} - \cos \theta_{2S}),$$

где  $n$  – количество элементарных площадок на поверхности фокального пятна  $S$ ;  $\varphi_{1S}$ ,  $\varphi_{2S}$ ,  $\theta_{1S}$ ,  $\theta_{2S}$  – углы в системе полярных координат, определяющие положение элементарной площадки на коллекторе, достижимой отраженными электронами из элементарной площадки  $S$ .

Эти углы рассчитываются для каждой элементарной площадки  $S$  на поверхности фокального пятна электронного луча.

В процессе математического моделирования потока отраженных электронов с поверхности фокального пятна электронного луча было получено устойчивое совпадение характеристик датчика с экспериментальными результатами в диапазоне малых ускоряющих напряжений (не более 7 кВ) и фокальным пятном площадью не более 30 мм<sup>2</sup>. В дальнейшем планируется провести эксперименты с лучами более высоких энергий и фокальными пятнами больших размеров.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шиллер З. Электронно-лучевая технология: пер. с нем. / З. Шиллер, У. Гайзиг, З. Панцер. М.: Энергия, 1980. 528 с.
2. Семенов Э.И. Контроль параметров тонких пленок, защитных покрытий и технологического процесса их нанесения в вакууме / Э.И. Семенов, А.В. Гусаров, С.Э. Семенова, А.С. Истомина, И.Ю. Паутов, Н.А. Швалев // Упрочняющие технологии и покрытия. 2006. № 6. С. 46–56.
3. Гусаров А.В. Математическая модель пространственного распределения потока электронов в датчике положения электронного луча // Методы и средства измерений физических величин: тез. докл. Всерос. науч.-техн. конф., 18–19 июня 1997 г. В 2 ч. Ч. II. Нижний Новгород: НГТУ, 1997. С. 23.
4. Гусаров А.В. Математическая модель однокоординатного датчика положения электронного луча / А. В. Гусаров, Н.И. Гусарова. Деп. в ВИНТИ 25.03.2008, № 249-В 2008.
5. Гусаров А.В. Двухкоординатный датчик положения электронного луча / А.В. Гусаров, Н.И. Гусарова. Деп. в ВИНТИ 24.12.2008, № 1003-В 2008.
6. Бронштейн И.М. Вторичная электронная эмиссия // И.М. Бронштейн, Б.С. Фрайман. М.: Наука, 1969. 408 с.

УДК 004.8.032.26

**Е. Г. Казаров, А. М. Рудаков**

Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны МО РФ  
Россия, г. Ярославль, e-mail: [kvalitet@ro.ru](mailto:kvalitet@ro.ru), [rudakov76loko@mail.ru](mailto:rudakov76loko@mail.ru)

### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ СООТВЕТСТВИЯ ВЫПУСКНИКА ВОЕННОГО ВУЗА ВИДУ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ВОЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ**

*С использованием нейронной сети выполнено научное обоснование соответствия выпускника военного вуза определенному виду военной деятельности на основании успеваемости по основным категориям дисциплин. В качестве входной функции нейронной сети использована успеваемость курсанта, обучающегося по каждой дисциплине. В качестве выходной функции - вид профессиональной военной деятельности, к которому пригоден выпускник.*

*На основе проведенного анализа полученных результатов из построенных моделей по статистическим характеристикам, количеству допущенных ошибок, предсказанным значениям выходной функции, чувствительности, максимальным значениям производительности и контроля выбрана лучшая модель 3 MLP 56-14-4. Погрешность проведенного эксперимента находится в интервале 0,21-0,26. Предложенный научный метод может быть учтен при распределении выпускников на первичные офицерские должности.*

**Ключевые слова:** выпускник, нейронная сеть, прогноз, модель, целевая функция.

## **E. G. Kazarov, A. M. Rydakov**

Yaroslavl Higher Military Institute of the Air Defense  
of the Ministry of Defense of the Russian Federation  
Russia, Yaroslavl, e-mail: *kvalitet@ro.ru, rudakov76loko@mail.ru*

### **DETERMINATION OF THE CONFORMITY OF A GRADUATE OF A HIGHER EDUCATIONAL INSTITUTE WITH A TYPE OF PROFESSIONAL MILITARY ACTIVITY**

*We used a neural network the scientific substantiation of the graduate's compliance with a certain type of military activity, on the basis of progress in the main categories of disciplines. As an input function of the neural network used student performance for each discipline. As an output function used a type of professional military activity, which is suitable graduate.*

*The best model 3 MLP 56-14-4 was chosen on the basis of the analysis of the results obtained from the models based on statistical characteristics, the number of errors, predicted values of the output function, sensitivity, maximum values of performance and control. The error of the experiment is in the range 0.21-0.26. The proposed scientific method can be taken into account in the distribution of graduates to primary officer positions.*

**Keywords:** *graduate, neural network, predict, model, objective function*

Эффективность выполнения своих профессиональных обязанностей, поставленных вышестоящим командованием задач, ведения боевых действий зависит, конечно, от многих факторов, одним из важнейших, несомненно, является соответствие выпускника военного вуза определенному виду профессиональной военной деятельности. Известно, что профессиональная удовлетворенность своей работой (службой) благотворно влияет на производительность труда, заинтересованность своим делом, совершенствование способов и методов повышения эффективности поставленных задач и даже укрепление семейных отношений. Кроме этого, профессиональная удовлетворенность своей работой (службой) стимулирует повышение настроения, общего тонуса организма и снижение социальной напряженности, поэтому прогноз пригодности обучающихся к определенному виду деятельности и направление выпускников на такие вакансии является актуальной задачей.

Целью исследования является научное обоснование соответствия выпускника вуза определенному виду профессиональной военной деятельности, на основании успеваемости по основным категориям дисциплин, с использованием нейронной сети.

Для проведения прогноза соответствия выпускников к определенному виду профессиональной военной деятельности по основным категориям дисциплин, с использованием нейронных сетей, были использованы сведения об успеваемости, обучающихся по «родственным» специальностям 143 выпускников:

Тамбовского высшего военного авиационного инженерного училища радиоэлектроники, специальность «Автоматизированные системы обработки информации и управления» (28 человек);

Военной академии воздушно-космической обороны им. Г.К. Жукова, специальность «Автоматизированные системы обработки информации и управления» (35 человек);

Санкт-Петербургского высшего военного училища радиоэлектроники, специальность «Автоматизированные системы обработки информации и управления» (50 человек);

Ярославского высшего зенитного ракетного училища ПВО, специальность «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети» (30 человек).

Гипотеза эксперимента:

- преподаваемые дисциплины предназначены для подготовки обучающихся к одному или нескольким определенным видам военной деятельности (дисциплины объединяются в категории по предназначенности подготовки к определенному виду профессиональной военной деятельности);

- высокие оценки каждой категории свидетельствуют о наибольшей пригодности выпускника к конкретному виду профессиональной военной деятельности, более низкие оценки о меньшей пригодности к определенному виду военной деятельности (на этой основе возможно, общее для указанных вузов, ранжирование пригодности выпускника к каждому виду военной деятельности).

В эксперименте использована статистика по следующим дисциплинам: боевое применение подразделений; математическое обеспечение автоматизированных систем управления (АСУ) радиотехнических войск (РТВ); основы радиолокации; устройство и эксплуатация аппаратуры передачи данных и связи; автомобильная подготовка; автоматизированные системы управления РТВ; базы данных; безопасность жизнедеятельности; боевое применение АСУ; военная история; военная техника АСУ авиации; войсковая стажировка; дипломная работа; инженерная графика; интерфейсы периферийных устройств; информатика; информационные технологии; иностранный язык; компьютерная графика; конструкторско-технологическое обеспечение производства ЭВМ; культурология; математический анализ; математическое обеспечение вычислительных комплексов АСУ; математика; междисциплинарный экзамен; методы и средства защиты компьютерной информации; метрология, стандартизация и сертификация; микропроцессорные системы; мобилизационная подготовка; моделирование систем; надежность, эргономика и качество автоматизированных систем обработки информации и управления; общевоинские уставы; огневая подготовка из стрелкового оружия; операционные системы; организация ЭВМ и систем; организация и планирование производства; основы органи-

зации связи, радиотехнического обеспечения и АСУ ВВС; основы построения зенитно-ракетных систем; отечественная история; основы теории управления; полигонная практика; политология; правоведение; программирование на языке высокого уровня; проектирование автоматизированных систем обработки информации и управления; психология и педагогика; радиационная, химическая и биологическая защита; радиотехнические средства; ремонтно-эксплуатационная практика; сетевые технологии; сети ЭВМ и телекоммуникации; системное программное обеспечение; системы реального времени; социология и политология; средства связи, радиотехнического обеспечения и радиолокации; строевая подготовка; тактика; тактическая маскировка; теоретические основы автоматизированного управления; теория автоматов; теория принятия решений; технологии программирования; устройство и эксплуатация аппаратуры вычислительного комплекса и его программное обеспечение; устройство и эксплуатация аппаратуры боевого управления; устройство и эксплуатация вспомогательной аппаратуры и оборудования; устройство и эксплуатация комплексов средств связи и передачи данных АСУ; управление подразделениями в мирное время; физика; философия; физическая культура; экология; экономика; электротехника и электроника.

Виды профессиональной военной деятельности, к которым готовятся выпускники, освоившие программу специалитета, определены положениями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по специальности 09.05.01 «Применение и эксплуатация автоматизированных систем специального назначения» и квалификационными требованиями к военно-профессиональной подготовке выпускников [1, 2]. Такими видами профессиональной военной деятельности являются: эксплуатационная, организационно-управленческая, проектная, производственно-технологическая, научно-исследовательская, военно-педагогическая.

Исходя из сведений о распределении выпускников на первичные офицерские должности, можно утверждать, что, как правило, выпускники попадают в войска на командирские должности, в научно-исследовательские институты на научные должности, в военные представительства предприятий ВПК на инженерные должности. Разделить их между собой, т.е. различить особенности таких видов военной деятельности, как эксплуатационная, организационно-управленческая, проектная, производственно-технологическая, достаточно проблематично, поэтому, было принято решение классифицировать предназначенность обучающихся следующим образом:

- эксплуатационная, включающую в себя организационно-управленческую, с направлением в войска;
- научно-исследовательская, с направлением в научно-исследовательские институты и на полигоны;



Задаются коды обучающей и контрольной подвыборок и параметры нейронной сети, в нашем случае:

- диапазон скрытых слоев нейронов от 7 до 35;
- количество сетей для обучения 20, сохранения 5;
- функции активации – логистическая, гиперболическая, экспоненциальная.

После задания первоначальных настроек, на основе имеющихся статистических данных, производится процесс обучения нейронных сетей. По окончании процесса обучения выбираются пять лучших моделей нейронных сетей, характеристики которых приведены в табл. 2.

**Таблица 2. Характеристики лучших моделей нейронных сетей**

Итоги моделей (Таблица данных1)								
N	Архитектура	Производительность обуч.	Контр. производительность.	Тест. производительность.	Алгоритм обучения	Функция ошибки	Ф-я актив. скрытых нейр.	Ф-я актив. выходных нейр.
1	MLP 56-8-4	84,2520	44,44444		BFGS 9	Сум. квадр.	Гиперболическая	Гиперболическая
2	MLP 56-17-4	57,4803	55,55556		BFGS 7	Сум. квадр.	Логистическая	Логистическая
3	MLP 56-14-4	100,0000	66,66667		BFGS 49	Энтропия	Гиперболическая	Софтмакс
4	MLP 56-24-4	83,4646	55,55556		BFGS 8	Энтропия	Гиперболическая	Софтмакс
5	MLP 56-14-4	84,2520	55,55556		BFGS 10	Энтропия	Логистическая	Софтмакс

Проанализируем отобранные модели, показавшие лучшие результаты из 20 обученных. Статистические характеристики отобранных моделей приведены в табл. 3.

**Таблица 3. Статистические характеристики отобранных моделей (фрагмент)**

НовПер48 (Итоги классификации) (Таблица данных1)						
Выборки: Обучающая						
		НовПер48-ВП	НовПер48-НИП	НовПер48-ПТ	НовПер48-Э	НовПер48-Все
1.MLP 56-8-4	Все	57,0000	3,0000	17,0000	50,0000	127,0000
	Правильно	52,0000	0,0000	15,0000	40,0000	107,0000
	Неправильно	5,0000	3,0000	2,0000	10,0000	20,0000
	Правильно (%)	91,2281	0,0000	88,2353	80,0000	84,2520
	Неправильно (%)	8,7719	100,0000	11,7647	20,0000	15,7480
2.MLP 56-17-4	Все	57,0000	3,0000	17,0000	50,0000	127,0000
	Правильно	57,0000	0,0000	11,0000	5,0000	73,0000
	Неправильно	0,0000	3,0000	6,0000	45,0000	54,0000
	Правильно (%)	100,0000	0,0000	64,7059	10,0000	57,4803
	Неправильно (%)	0,0000	100,0000	35,2941	90,0000	42,5197
3.MLP 56-14-4	Все	57,0000	3,0000	17,0000	50,0000	127,0000
	Правильно	57,0000	3,0000	17,0000	50,0000	127,0000
	Неправильно	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	Правильно (%)	100,0000	100,0000	100,0000	100,0000	100,0000
	Неправильно (%)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4.MLP 56-24-4	Все	57,0000	3,0000	17,0000	50,0000	127,0000
	Правильно	52,0000	0,0000	13,0000	41,0000	106,0000
	Неправильно	5,0000	3,0000	4,0000	9,0000	21,0000
	Правильно (%)	91,2281	0,0000	76,4706	82,0000	83,4646
	Неправильно (%)	8,7719	100,0000	23,5294	18,0000	16,5354
5.MLP 56-14-4	Все	57,0000	3,0000	17,0000	50,0000	127,0000
	Правильно	54,0000	0,0000	14,0000	39,0000	107,0000
	Неправильно	3,0000	3,0000	3,0000	11,0000	20,0000
	Правильно (%)	94,7368	0,0000	82,3529	78,0000	84,2520
	Неправильно (%)	5,2632	100,0000	17,6471	22,0000	15,7480

Из результатов, приведенных в табл. 3, видно, что наиболее хорошими статистическими характеристиками обладает модель 3 MLP 56-14-4.

Результаты определения целевой функции, рассчитанные и полученные с использованием построенной сети, приведены в табл. 4.

**Таблица 4. Предсказанные значения выходной функции (фрагмент)**

Наблюд. номер #	Таблица предсказанных значений для НовПер48 (Таблица данных1)					
	НовПер48 Целевая	НовПер48 - Выход 1. MLP 56-8-4	НовПер48 - Выход 2. MLP 56-17-4	НовПер48 - Выход 3. MLP 56-14-4	НовПер48 - Выход 4. MLP 56-24-4	НовПер48 - Выход 5. MLP 56-14-4
1	Э	Э	ВП	Э	Э	Э
3	Э	Э	ВП	Э	Э	Э
4	ПТ	ПТ	ПТ	ПТ	ПТ	Э
5	ПТ	Э	ПТ	ПТ	ПТ	ПТ
6	Э	Э	ВП	Э	Э	Э
7	Э	Э	ПТ	Э	Э	ПТ
8	ВП	ВП	ВП	ВП	ВП	ВП
9	ВП	ВП	ВП	ВП	ВП	ВП
10	НИР	Э	Э	НИР	Э	Э
11	ВП	ВП	ВП	ВП	ВП	ВП
14	ПТ	Э	ПТ	ПТ	ПТ	ПТ
15	ВП	ВП	ВП	ВП	ВП	ВП
16	Э	Э	ВП	Э	Э	Э
17	Э	Э	ВП	Э	Э	Э
18	Э	Э	ВП	Э	Э	ВП
19	НИР	Э	ПТ	НИР	ПТ	Э
20	ВП	ВП	ВП	ВП	ВП	ВП
21	ВП	ВП	ВП	ВП	ВП	ВП
22	ВП	ВП	ВП	ВП	ВП	ВП
23	Э	Э	ПТ	Э	Э	Э
24	Э	Э	ВП	Э	Э	Э
26	ПТ	ПТ	ПТ	ПТ	ПТ	ПТ
27	Э	Э	Э	Э	Э	Э
28	Э	Э	ВП	Э	Э	Э
30	ВП	ВП	ВП	ВП	Э	ВП
31	Э	ВП	ВП	Э	ВП	ВП
32	ВП	ВП	ВП	ВП	ВП	ВП
33	ВП	ВП	ВП	ВП	ВП	ВП
34	Э	Э	ВП	Э	Э	Э
35	Э	Э	ВП	Э	Э	Э
36	ВП	ВП	ВП	ВП	ВП	ВП
37	Э	Э	ВП	Э	Э	Э
38	Э	Э	ВП	Э	Э	Э

Из табл. 4 видно, что классификация контрольной выборки, проведенная нейронной сетью, выполнена с некоторыми ошибками, наименьшее число ошибок допущено моделью 3 MLP 56-14-4.

На следующем этапе была рассчитана чувствительность построенных моделей (табл. 5).

Из табл. 5 видно, что наибольшей чувствительностью из построенных моделей обладает модель 3 MLP 56-14-4.

**Таблица 5. Чувствительность построенных моделей (фрагмент)**

Сети	Чувствительность (Таблица данных1) Выборки: Обучающая										
	Пер10	НовПер31	НовПер40	НовПер28	Пер2	НовПер38	НовПер1	НовПер24	НовПер25	НовПер41	Пер8
1.MLP 56-8-4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.MLP 56-17-4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3.MLP 56-14-4	13622747	5437368	5228413	4675428	4291127	2831577	2130221	1615503	1520950	1141880	1101386
4.MLP 56-24-4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5.MLP 56-14-4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Среднее	2724550	1087474	1045683	935086	858226	566316	426045	323101	304191	228377	220278

На основе проведенного анализа полученных результатов из пяти построенных моделей выбрана лучшая по статистическим характеристикам, количеству допущенных ошибок, предсказанным значениям выходной функции, чувствительности, максимальным значениям производительности и контроля. Таковой является модель 3 MLP 56-14-4, ее основными характеристиками являются:

- входных функций - 56;
- скрытых слоев – 14;
- выходных функций - 4.
- производительность обучения 100%;
- контроль производительности 66,6%;
- алгоритм обучения BFGS 49;
- функция ошибки – энтропия;
- функция активации скрытых нейронов – гиперболическая;
- функция активации выходных нейронов – софтмакс.

Погрешность прогноза построенной модели для имеющейся контрольной выборки составила 4%.

Сравнение результатов, полученных с помощью построенной нейронной сети и рассчитанными значениями, приведены в табл. 6.

**Таблица 6. Сравнение результатов, полученных с помощью построенной нейронной сети и рассчитанными значениями (матрица ошибок)**

	НовПер48 (Итоги классификации) (Таблица данных1) Выборки: Обучающая					
		НовПер48-ВП	НовПер48-НП	НовПер48-ПТ	НовПер48-Э	НовПер48-Все
<b>3.MLP 56-14-4</b>	<b>Все</b>	57,0000	3,0000	17,0000	50,0000	127,0000
	Правильно	57,0000	3,0000	17,0000	50,0000	127,0000
	Неправильно	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	Правильно (%)	100,0000	100,0000	100,0000	100,0000	100,0000
	Неправильно (%)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Из табл. 6 видно, что правильность классификации выбранной моделью контрольной выборки составила 100%.

Попытаемся хотя бы приблизительно оценить погрешность выполненного прогноза. В проведенных ранее исследованиях погрешность выполненного прогноза не оценивалась, оценивалась лишь погрешность построенной модели, которая составила 0% из-за небольшого количества контролируемых данных.



При проведении научного обоснования пригодности выпускника военного вуза к определенному виду профессиональной военной деятельности были выявлены следующие погрешности:

- объединения родственных дисциплин и дисциплин специализации в научные направления;

- отнесения дисциплины к виду профессиональной военной деятельности и принципиальная невозможность её отнесения ко всем видам деятельности;

- объединения экспертных оценок;

- выполненного прогноза с использованием нейронной сети.

Погрешность объединения родственных дисциплин в одно научное направление вызвано необходимостью использования статистики успеваемости выпускников, обучавшихся в других учебных заведениях и впоследствии переведенных в Ярославское ВВУ ПВО, определяется в интервале 0,05-0,10.

Погрешность отнесения дисциплины к определенному виду профессиональной военной деятельности определяется исходя из положений, что одна дисциплина может готовить выпускника сразу к нескольким видам профессиональной военной деятельности и находится в интервале 0,10-0,16.

Погрешность объединения экспертных оценок определялась методом Демстера-Шафера и составила 0,18 [5, 6].

Погрешность выполненного прогноза с использованием нейронной сети составила 0%, что свидетельствует о высокой достоверности полученной модели нейронной сети.

Предполагается, что выявленные погрешности не коррелированы между собой, поэтому возможно их геометрическое суммирование.

Нижний предел интервала суммарной погрешности

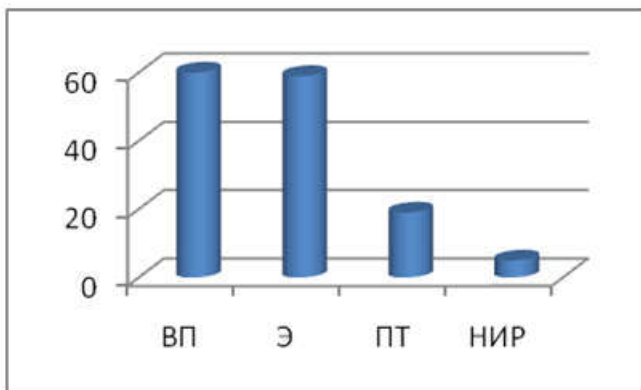
$$\delta = \sqrt{0,05^2 + 0,1^2 + 0,18^2 + 0^2} = 0,21.$$

Верхний предел интервала суммарной погрешности

$$\delta = \sqrt{0,1^2 + 0,16^2 + 0,18^2 + 0^2} = 0,26.$$

Из проведенных расчетов следует, что в нашем случае наибольший вклад в погрешность выполненного прогноза оказывают погрешности объединения экспертных оценок и отнесения дисциплины к виду профессиональной военной деятельности. Итоговая погрешность проведенного эксперимента находится в интервале 0,21-0,26.

При проведении прогноза оценены количественные показатели пригодности выпускников военного вуза к определенному виду профессиональной военной деятельности на основании успеваемости по определенным группам предметов, которые приведены на рис. 1.



**Рис. 1. Количественные показатели пригодности выпускников военного вуза к определенному виду профессиональной военной деятельности на основании успеваемости по определенным группам предметов**

Из рис. 1 видно, что наибольшая пригодность выпускников наблюдается к военно-педагогической, а наименьшая – к научно-исследовательской деятельности.

Таким образом, предложен научный метод обоснования соответствия выпускника военного вуза определенному виду профессиональной военной деятельности, на основании успеваемости по определенным категориям дисциплин, с использованием нейронной сети. В качестве входной функции прогноза использована оценка выпускника за каждую изученную дисциплину, а в качестве выходной функции - вид профессиональной военной деятельности, к которому обучающийся наиболее пригоден.

Построено несколько моделей нейронной сети, по максимальным значениям производительности и контроля производительности выбрана лучшая модель MLP 56-14-4. Погрешность прогноза построенной модели для имеющейся контрольной выборки составила 0%. Погрешность проведенного эксперимента находится в интервале 0,21-0,26 при доверительной вероятности 0,95. По результатам проведенного эксперимента гипотеза эксперимента была подтверждена.

Установлено, что наибольшее соответствие выпускников наблюдается в организационно-управленческой, а наименьшая - в производственно-конструкторской деятельности. Такое распределение видов деятельности в основном соответствует перечню должностей, предлагаемых выпускникам при назначении на первичные офицерские должности.

При изменении входных или выходной функций будет меняться и цель прогноза, что свидетельствует о возможности модификации постро-

енной модели. Аналогичный прогноз пригодности обучающихся к определенному виду деятельности может быть проведен для любых учебных групп и любых видов профессиональной деятельности. Полученные результаты могут быть учтены при распределении выпускников на первичные офицерские должности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования по специальности 09.05.01 «Применение и эксплуатация автоматизированных систем специального назначения». М. 2014.
2. Квалификационные требования к военно-профессиональной подготовке выпускников (дополнение к государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования) Ярославское ВВЗРУ ПВО по направлению 230100 «Информатика и вычислительная техника», 2007.
3. *Розенблатт Ф.* Принципы нейродинамики: перцептроны и теория механизмов мозга. М.: Мир, 1965. 480 с.
4. STATISTICA: Руководство пользователя. StatSoft, 2010. 222 с.
5. Прикладное применение правил комбинирования экспертных оценок / Е.Г. Казаров, А.М. Рудаков, А.В. Новик, Т.И. Коваленко // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 12. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ 2017. С. 232-240.
6. *Казаров Е.Г.* Выбор предпочтительного варианта автоматизированной системы управления с применением теории многокритериальной функции полезности / Е.Г. Казаров., А.М. Рудаков // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 13. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2018. С 166-172.

УДК 621.891: 621.026

**Л. В. Королев, Д. О. Бытев**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: korolevly@mail.ru

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОГО ТРАНСПОРТА В ОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ С ЛОВУШКАМИ**

*Предложена система кинетических уравнений для описания случайного переноса частиц в конечной среде с учетом эффектов памяти. Изучены режимы транспорта, возникающие при различных условиях движения частиц и их пребывания в ловушках.*

**Ключевые слова:** блуждания с непрерывным временем, кинетические уравнения, супердиффузия, субдиффузия.

**L. V. Korolev, D. O. Bytev**

Yaroslavl State Technical University  
Yaroslavl, Russia, e-mail: korolevlv@mail.ru

## **MODELING OF RANDOM TRANSPORT IN A BOUNDED MEDIUM WITH TRAPS**

*A system of kinetic equations is proposed for describing random particle transport in a finite medium, taking into account memory effects. The modes of transport arising under different conditions of particles motion and their staying in traps are studied.*

**Keywords:** CTRW, kinetic equations, superdiffusion, subdiffusion.

Модели случайного транспорта частиц в непрерывном или дискретном фазовом пространстве, протекающего в непрерывном времени, находят широкое применение в естественных науках, технике, экономике и других областях знаний. Важнейшей из этих моделей является классическая диффузия, которая предполагает, что пространственные и временные масштабы единичного случайного смещения частицы малы по сравнению с масштабами изучаемой системы. В последнее десятилетие многие исследователи обращаются к изучению процессов случайного транспорта «с памятью», для которых указанное предположение не является справедливым [1]. Примерами таких процессов могут служить фильтрация частиц в пористых средах, транспорт ионов через мембраны живых клеток, распространение излучения в средах со сложной структурой рассеивающих центров.

При моделировании процессов «с памятью» длительность единичного случайного смещения частицы характеризуется плотностью распределения степенного вида с бесконечным математическим ожиданием, что является формальным выражением соизмеримости этой длительности со сколь угодно большим временем наблюдения. Во многих моделях случайного транспорта в единичном смещении частицы выделяют два этапа, имеющих случайные длительности: ожидание в ловушке, в течение которого координаты частицы не меняются, и собственно движение частицы из одной точки фазового пространства в другую с некоторой постоянной или случайной скоростью. Если средняя длительность ожидания бесконечна, то процесс называют субдиффузией, а если бесконечна средняя длительность движения, то говорят о супердиффузионном процессе.

Кинетические уравнения процессов «с памятью» являются интегральными с нелокальными степенными ядрами и часто записываются с помощью операторов дробной производной и/или дробного интегрирования [1]. Для процессов, протекающих в неограниченных средах, эти уравнения обычно решаются численно, а с помощью интегральных преобразо-

ваний Лапласа или Фурье во многих случаях удается найти асимптотические представления решений в аналитическом виде. Описание случайного транспорта в среде конечных размеров, на границах которой может происходить отражение и/или поглощение частиц, является более сложной задачей. Например, в случае супердиффузионного процесса частица может в течение одного случайного перемещения многократно отразиться от границ среды, что приводит к необходимости учета граничных эффектов в ядре самого интегрального кинетического уравнения.

Более эффективный, на наш взгляд, подход к моделированию случайного транспорта «с памятью» в ограниченной среде изложен в работах [2-4]. Он основан на добавлении в фазовое пространство частицы дополнительных переменных, количество которых равно числу случайных процессов, совместно протекающих в системе. Значение каждой такой переменной в любой момент времени равно длительности временного интервала, прошедшего с начала последнего случайного смещения частицы, обусловленного соответствующим процессом. Эти дополнительные переменные можно, таким образом, назвать собственными временами случайных процессов [2]. Дополнение фазового пространства частицы собственными временами позволяет записать кинетическое уравнение для плотности распределения частицы в локальном по времени наблюдения виде, то есть в стандартной форме Фоккера – Планка – Колмогорова – Феллера, традиционно применяющейся для описания марковских случайных процессов. При этом граничные условия, необходимые для решения уравнений в среде конечных размеров, также можно представить в виде локальных соотношений для потоков частиц в каждой точке границы.

В настоящей работе мы применяем описанный метод к следующей модельной задаче. Частица совершает случайные блуждания в одномерной среде, расположенной на отрезке  $[-L, L]$  оси  $x$ . Частица может двигаться влево или вправо с постоянной по абсолютной величине скоростью  $v_0$ , при этом длительность непрерывного движения в одном направлении  $\tau_w$  случайна и характеризуется плотностью распределения  $p_w(\tau)$ . По прошествии времени  $\tau_w$  частица попадает в ловушку и остается неподвижной в течение случайного времени  $\tau_r$ , плотность распределения которого задается функцией  $p_r(\tau)$ . Выходя из ловушки, частица с равной вероятностью выбирает направление движения вправо или влево и начинает новое случайное перемещение. Расширенное фазовое пространство частицы составляют ее положение  $x$ , состояние, в которой находится частица (пребывание в ловушке или движение), направление скорости перемещения и собственные времена каждого состояния:  $\tau_r$  и  $\tau_w$ . Плотность распределения

$f$  частиц в фазовом пространстве в момент времени наблюдения  $t$  может быть записана в виде

$$f(x, \tau_w, \tau_{ir}, t) = \delta(\tau_w) f_{ir}(x, \tau_{ir}, t) + \delta(\tau_{ir}) (f_{-1}(x, \tau_w, t) + f_1(x, \tau_w, t)), \quad (1)$$

где  $f_{ir}$  - плотность распределения частиц, находящихся в ловушках;  $f_{-1}$  и  $f_1$  - плотности распределения частиц, движущихся, соответственно, влево и вправо;  $\delta(\tau)$  - дельта-функция. Наблюдаемое распределение частиц по координате  $x$  может быть получено интегрированием распределения (1) по переменным  $\tau_{ir}$  и  $\tau_w$ :

$$f(x, t) = \int_0^\infty d\tau_w \int_0^\infty d\tau_{ir} f(x, \tau_w, \tau_{ir}, t). \quad (2)$$

Рассмотрим малый интервал времени наблюдения  $(t, t + dt)$ . Если частица в момент  $t$  находится в ловушке, то вероятность выхода из нее в течение данного интервала пропорциональна его длине и может быть представлена в виде  $q_{ir}(\tau_{ir})dt$ . Если частица в этот момент движется, то вероятность попадания ее в ловушку равна, соответственно,  $q_w(\tau_w)dt$ . Коэффициенты  $q_{ir}$  и  $q_w$  выражаются через плотности  $p_{ir}$  и  $p_w$  формулами

$$q_{ir}(\tau_{ir}) = \frac{p_{ir}(\tau_{ir})}{\left(1 - \int_0^{\tau_{ir}} p_{ir}(\tau') d\tau'\right)}, \quad q_w(\tau_w) = \frac{p_w(\tau_w)}{\left(1 - \int_0^{\tau_w} p_w(\tau') d\tau'\right)}. \quad (3)$$

Переходы частицы из одного состояния в другое на данном интервале описываются следующими соотношениями между компонентами плотности  $f$ :

$$\begin{aligned} f_1(x, \tau_w, t + dt) &= (1 - q_w(\tau_w - dt)dt) f_1(x - v_0 dt, \tau_w - dt, t) + \\ &+ dt \frac{\delta(\tau_w)}{2} \int_0^\infty d\tau_{ir} q_{ir}(\tau_{ir}) f_{ir}(x, \tau_{ir}, t), \\ f_{-1}(x, \tau_w, t + dt) &= (1 - q_w(\tau_w - dt)dt) f_{-1}(x + v_0 dt, \tau_w - dt, t) + \\ &+ dt \frac{\delta(\tau_w)}{2} \int_0^\infty d\tau_{ir} q_{ir}(\tau_{ir}) f_{ir}(x, \tau_{ir}, t), \\ f_{ir}(x, \tau_{ir}, t + dt) &= (1 - q_{ir}(\tau_{ir} - dt)dt) f_{ir}(x, \tau_{ir} - dt, t) + \\ &+ dt \delta(\tau_{ir}) \int_0^\infty d\tau_w q_w(\tau_w) (f_{-1}(x, \tau_w, t) + f_1(x, \tau_w, t)). \end{aligned} \quad (4)$$

Разложение выражений (4) по малой величине  $dt$  до членов первого порядка приводит к системе кинетических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(x, \tau_w, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial f_1(x, \tau_w, t)}{\partial \tau_w} - v_0 \frac{\partial f_1(x, \tau_w, t)}{\partial x} - q_w(\tau_w) f_1(x, \tau_w, t) + \\ & + \frac{\delta(\tau_w)}{2} \int_0^\infty d\tau_{ir} q_{ir}(\tau_{ir}) f_{ir}(x, \tau_{ir}, t), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{-1}(x, \tau_w, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial f_{-1}(x, \tau_w, t)}{\partial \tau_w} + v_0 \frac{\partial f_{-1}(x, \tau_w, t)}{\partial x} - q_w(\tau_w) f_{-1}(x, \tau_w, t) + \\ & + \frac{\delta(\tau_w)}{2} \int_0^\infty d\tau_{ir} q_{ir}(\tau_{ir}) f_{ir}(x, \tau_{ir}, t), \\ \frac{\partial f_{ir}(x, \tau_{ir}, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial f_{ir}(x, \tau_{ir}, t)}{\partial \tau_{ir}} - q_{ir}(\tau_{ir}) f_{ir}(x, \tau_{ir}, t) + \\ & + \delta(\tau_{ir}) \int_0^\infty d\tau_w q_w(\tau_w) (f_{-1}(x, \tau_w, t) + f_1(x, \tau_w, t)). \end{aligned}$$

Система (5) должна быть дополнена начальными и граничными условиями. Будем считать, что в начальный момент времени наблюдения частица находится в ловушке, расположенной в центре среды. Тогда начальные условия принимают форму

$$f_{ir}(x, \tau_{ir}, t=0) = \delta(x)\delta(\tau_{ir}), \quad f_{-1}(x, \tau_w, t=0) = f_1(x, \tau_w, t=0) = 0. \quad (6)$$

Полагая, что внутреннее отражение частицы от границы среды меняет только направление ее движения и не влияет на значение собственного времени  $\tau_w$ , запишем граничные условия в виде [4]:

$$\begin{aligned} f_{-1}(x=L, \tau_{ir}, t) &= R f_1(x=L, \tau_{ir}, t), \\ f_1(x=-L, \tau_{ir}, t) &= R f_{-1}(x=-L, \tau_{ir}, t), \end{aligned} \quad (7)$$

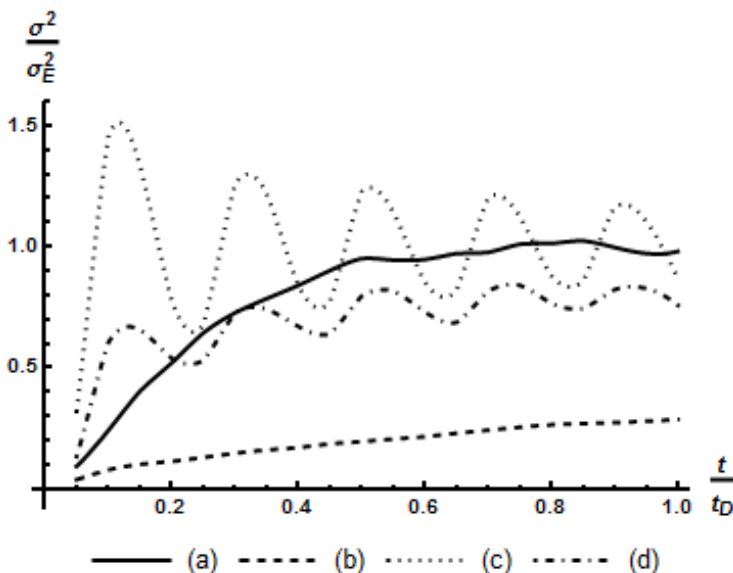
где  $0 \leq R \leq 1$  – коэффициент внутреннего отражения.

Система линейных интегро-дифференциальных уравнений (5) - (7) с учетом выражений (3) может решаться численно для любых заданных плотностей  $p_{ir}$  и  $p_w$ . При  $R=1$  она описывает релаксацию первоначального распределения частиц с нулевой дисперсией в изолированной среде. Анализ показывает, что характер релаксации определяется тем, какие из плотностей  $p_{ir}$  и  $p_w$  имеют бесконечное математическое ожидание (сохраняют «память»), а какие – конечное. Для численного анализа в качестве модельных распределений были взяты экспоненциальное распределение  $p_{\text{exp}}(\tau) = \tau_0^{-1} \exp(-\tau/\tau_0)$  с конечным математическим ожиданием  $\tau_0$  и сте-

пенное распределение  $p_{pow}(\tau) = 0.5\tau_0^{-1}(1 + \tau/\tau_0)^{-3/2}$ , имеющее бесконечное математическое ожидание ( $\tau_0$  - параметр с размерностью времени). В этом случае можно выделить четыре различных режима релаксации, определяемых видом распределений  $p_{tr}(\tau_{tr})$  и  $p_w(\tau_w)$ :

- (а) классическая диффузия ( $p_{tr}(\tau_{tr}) = p_{exp}(\tau_{tr})$ ,  $p_w(\tau_w) = p_{exp}(\tau_w)$ );
- (б) субдиффузия ( $p_{tr}(\tau_{tr}) = p_{pow}(\tau_{tr})$ ,  $p_w(\tau_w) = p_{exp}(\tau_w)$ );
- (с) супердиффузия ( $p_{tr}(\tau_{tr}) = p_{exp}(\tau_{tr})$ ,  $p_w(\tau_w) = p_{pow}(\tau_w)$ );
- (д) супердиффузия с длительным пребыванием в ловушках ( $p_{tr}(\tau_{tr}) = p_{pow}(\tau_{tr})$ ,  $p_w(\tau_w) = p_{pow}(\tau_w)$ ).

На рис. 1 представлено изменение дисперсии  $\sigma^2$  положения частицы  $x$  с течением времени наблюдения, вычисленной по распределению (2) для каждого из режимов. Дисперсия отнесена к дисперсии равномерного распределения на отрезке  $\sigma_E^2 = L^2/3$ , а в качестве единицы измерения времени выбрана длительность диффузионной релаксации  $t_D = L^2/(v_0^2 \tau_0)$ .



**Рис. 1. Зависимость дисперсии положения частицы от времени в различных режимах:**

- (а) – классическая диффузия; (б) – субдиффузия; (с) – супердиффузия;
- (д) – супердиффузия с длительным пребыванием в ловушках



Из графиков видно, что в режиме субдиффузии дисперсия растет гораздо медленнее, чем в классической диффузии, из-за длительной задержки частиц в ловушках. В режиме супердиффузии дисперсия ведет себя немонотонно. Сильные осцилляции связаны с проявляющимся в этом режиме эффектом волнового транспорта: частицы редко попадают в ловушки, задерживаются в них ненадолго, и, поскольку скорость частиц одинакова, двигаются почти синхронно. При этом в их распределении наблюдаются два ярко выраженных максимума, которые то расходятся к границам среды (на этих временных отрезках дисперсия растет), то вновь сходятся, отразившись от границ, к центру (дисперсия падает). В режиме супердиффузии с длительным пребыванием в ловушках волновые эффекты сохраняются, но выражены гораздо слабее, так как синхронизация движения частиц разрушается из-за большого разброса длительностей их пребывания в ловушках. Кроме того, длительная задержка в ловушках снижает среднюю скорость движения частиц, что приводит к более медленному росту дисперсии на больших временах.

Таким образом, в работе получена система кинетических уравнений (5) с граничными условиями (7), описывающая случайный транспорт частиц с эффектами «памяти» в одномерной конечной среде с отражающими границами. Представленная модель позволяет изучать различные режимы случайного транспорта и допускает непосредственное обобщение на случай сред большей размерности, а также неоднородных и нестационарных процессов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kutner R.* The continuous time random walk, still trendy: fifty-year history, state of art and outlook / R. Kutner, J. Masoliver // *Eur. Phys. J. B.* 2017. 90: 50 DOI: 10.1140/epjb/e2016-70578-3.
2. *Королев Л.В.* Собственное время в модели случайного процесса / Л.В. Королев, Д.О. Бытев // *Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11.* Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. С. 215–218.
3. *Королев Л.В.* Моделирование субдиффузионного процесса массопереноса / Л.В. Королев, Д.О. Бытев // *Сб. науч. тр. VI Междунар. науч.-техн. симп. «Современные энерго- и ресурсосберегающие технологии СЭГТ – 2017» Т. 2 . М.: ФГБОУ ВО «РГУ им. А.Н. Косыгина». 2017. С. 121-123.*
4. *Королев Л.В.* Моделирование супердиффузионного процесса в среде с отражающими границами / Л.В. Королев, Д.О. Бытев // *Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 12.* Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2017. С. 246–250.

**Е. Ю. Лискина, И. П. Шукина**

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина  
Россия, г. Рязань, e-mail: e.liskina@365.rsu.edu.ru,  
i.shukina@365.rsu.edu.ru

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРУДОВОЙ ПРИВЛЕКАТЕЛЬНОСТИ РЕГИОНОВ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

*В данной статье исследуется влияние ряда экономических факторов на трудовую привлекательность регионов России. Показателями трудовой привлекательности выбраны численность рабочей силы и потребность в работниках, заявленная работодателями. Проанализирована динамика изменения количества факторов, влияющих на трудовую привлекательность.*

**Ключевые слова:** эконометрическое моделирование, множественная регрессия, множественная корреляция, рынок труда, трудовая привлекательность региона.

**E. Ju. Liskina, I. P. Schukina**

S.A. Esenin Ryazan State University  
Russia, Ryazan, e-mail: e.liskina@365.rsu.edu.ru,  
i.shukina@365.rsu.edu.ru

## **MODELING THE LABOR ATTRACTIVENESS OF THE RUSSIAN FEDERATION'S REGIONS**

*In this article we investigated the influence of a number of economic factors on the labor attractiveness of Russian regions. We chose the size of the workforce and the need for workers, declared by employers, as indicators of labor attractiveness. We analyzed the dynamics of changes in the number of factors affecting the labor attractiveness.*

**Keywords:** econometric modeling, multiple regression, multiple correlation, labor market, labor attractiveness of the region.

**1. Постановка задачи.** Изучение рынка труда является одной из актуальных задач экономического исследования, которому посвящено достаточно большое количество работ. Обзор подходов к определению рынка труда как экономической категории представлен в статье [1]. Направления математического моделирования в исследованиях рынка труда представлены в [2]. Различные модели прогнозирования рынка труда предложены в статьях [3–5].

Целью данного исследования является выявление влияния различных экономических факторов на трудовую привлекательность регионов

Российской Федерации. В качестве индикаторов трудовой привлекательности выбраны следующие показатели (эндогенные переменные):

$Y_1$  – численность экономически активного населения (численность рабочей силы, тыс. чел.),

$Y_2$  – потребность в работниках, заявленная работодателями в органы службы занятости населения (чел.).

В качестве экономических экзогенных факторов были выбраны следующие показатели:

$X_1$  – среднегодовая численность населения (тыс. чел.);

$X_2$  – инвестиции в основной капитал на душу населения (тыс. руб./чел.);

$X_3$  – ВРП на душу населения (тыс. руб./чел.);

$X_4$  – фондовооружённость (тыс. руб./чел.);

$X_5$  – общая площадь жилых помещений, приходящаяся в среднем на одного жителя (кв. м/чел.);

$X_6$  – среднемесячная номинальная начисленная заработная плата работников организаций (руб./чел.).

Задача данного исследования – проследить, какие из выбранных факторов оказывали статистически значимое влияние на показатели трудовой привлекательности за период с 2006 по 2016 годы.

Источником статистических данных для исследования является статистический сборник «Регионы России. Социально-экономические показатели» за 2006–2017 годы [6]. Исследование было выполнено средствами табличного процессора MSExcel. Вычисления проводились на уровне значимости 0,05.

**2. Результаты исследования.** Оценка взаимосвязи количественно измеренных переменных осуществлялась на основе парного линейного коэффициента корреляции Пирсона с использованием инструмента «Анализ Данных. Корреляция» табличного процессора MSExcel, а также – на основе построения уравнения множественной линейной регрессии по кросс-данным для каждого года рассматриваемого периода с использованием инструмента «Анализ Данных. Регрессия»:

$$Y_1 = a_0 + \sum_{i=1}^6 a_i X_i + \varepsilon_j, \quad t = \overline{2006; 2016}, \quad (1)$$

$$Y_2 = b_0 + \sum_{i=1}^6 b_i X_i + \varepsilon_j, \quad t = \overline{2006; 2016}, \quad (2)$$

На основе проведённых вычислений были выявлены статистически значимые в каждом году факторы, влияющие на показатели трудовой при-

влекательности (табл. 1, рис. 1) и коэффициент детерминации  $R^2$  наилучших уравнений множественной регрессии.

**Таблица 1. Динамика статистически значимых факторов и коэффициента детерминации  $R^2$  наилучших уравнений множественной регрессии**

Год	Показатель $Y_1$		Показатель $Y_2$	
	$R^2$	Значимые факторы	$R^2$	Значимые факторы
2006	0,995	$X_1, X_3, X_4, X_5$	0,846	$X_1, X_2, X_3, X_4$
2007	0,951	$X_1$	0,834	$X_1, X_2, X_3$
2008	0,997	$X_1, X_4$	0,805	$X_1, X_2, X_3$
2009	0,997	$X_1, X_2, X_4, X_6$	0,781	$X_1, X_2, X_3, X_6$
2010	0,996	$X_1, X_5, X_6$	0,808	$X_1, X_6$
2011	0,996	$X_1, X_4, X_5$	0,812	$X_1$
2012	0,997	$X_1, X_2, X_4, X_5, X_6$	0,883	$X_1, X_2, X_4, X_6$
2013	0,997	$X_1, X_2, X_3, X_6$	0,908	$X_1, X_2, X_4, X_6$
2014	0,994	$X_1, X_2, X_6$	0,805	$X_1, X_2$
2015	0,996	$X_1, X_2, X_3, X_6$	0,811	$X_1, X_2, X_3$
2016	0,996	$X_1, X_2, X_3$	0,846	$X_1, X_3$

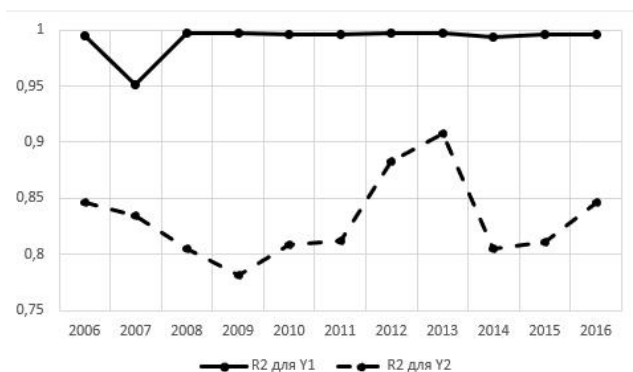
Из табл. 1 следует, что среди исследуемых экономических факторов стабильное статистически значимое влияние на показатели трудовой привлекательности  $Y_1$  и  $Y_2$  оказывает только среднегодовая численность населения  $X_1$ .

Для показателя  $Y_1$  по частоте в порядке убывания расположились следующие факторы: инвестиции в основной капитал на душу населения  $X_2$  и среднемесячная номинальная начисленная заработная плата работников организаций  $X_6$  (по 6 раз), фондовооружённость  $X_4$  (5 раз), ВРП на душу населения  $X_3$  и общая площадь жилых помещений, приходящаяся в среднем на одного жителя  $X_5$  (по 4 раза).

Для показателя  $Y_2$  по частоте в порядке убывания расположились следующие факторы: инвестиции в основной капитал на душу населения  $X_2$  (8 раз), ВРП на душу населения  $X_3$  (6 раз), среднемесячная номинальная начисленная заработная плата работников организаций  $X_6$  (4 раза), фондовооружённость  $X_4$  (3 раза). Фактор  $X_5$  общая площадь

жилых помещений, приходящаяся в среднем на одного жителя, не оказывает статистически значимого влияния на  $Y_2$ .

Величина  $R^2$  наилучшего уравнения множественной регрессии для показателя  $Y_1$  является стабильной на протяжении всего рассматриваемого периода (см. рис. 1). Для показателя  $Y_2$  величина  $R^2$  заметно снижается в кризисные годы (2009 и 2014), что может говорить о том, что на потребность в работниках, заявленную работодателями в органы службы занятости населения, могут оказывать влияние неучтённые в модели факторы.



**Рис. 1.** Динамика коэффициента детерминации  $R^2$  наилучших уравнений множественной регрессии

**Выводы.** Проведенное исследование показывает, что для построения модели трудовой привлекательности региона требуется уточнить состав экзогенных факторов. На основании подобранных экзогенных факторов и эндогенных переменных можно будет исследовать региональные различия в трудовой привлекательности регионов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Королев Д.Ю.* Рынок труда: дискуссионные моменты [Электронный ресурс] / Д.Ю. Королев // ПСЭ. 2013. №3 (47). С. 140–142. Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/rynok-truda-diskussionnye-momentu> (дата обращения: 17.11.2018).
2. *Гладышева А.В.* Математическое моделирование как инструмент исследования рынка труда [Электронный ресурс] // Социально-экономические явления и процессы. 2008. №2 (010). С. 11–14. Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/matematicheskoe-modelirovanie-kak-instrument-issledovaniya-rynka-truda> (дата обращения: 22.01.2019).

3. Хацкевич В.Л. Эконометрическое моделирование показателей регионального рынка труда [Электронный ресурс] / В.Л. Хацкевич, Г.Н. Безрядина, Н.В. Концева // Современная экономика: проблемы и решения, [S.I.]. 2015. Т. 10. С. 192–199. Режим доступа: <https://meps.econ.vsu.ru/index.php/meps/article/view/500>. (дата обращения: 22.01.2019).
4. Курятков В.А. Прогнозирование рынка труда методами системной динамики / В.А. Курятков, К.О. Конюшевская // Вестник РЭУ. 2012. № 9. С. 94–100.
5. Шеломенцева М.В. Экономико-статистические модели формирования трудовых ресурсов: ретроспективный аспект [Электронный ресурс] // Интернет-журнал «Науковедение». 2013. № 3. Режим доступа: <https://naukovedenie.ru/PDF/56evn313.pdf> (дата обращения: 22.01.2019).
6. Регионы России. Социально-экономические показатели: статистический сборник 2006–2017 гг. [Электронный ресурс] // Федеральная служба гос. статистики. Режим доступа: [http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat\\_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc\\_1138623506156](http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1138623506156) (дата обращения 14.01.2019 г.).

УДК 517.95:556.53

**В. А. Наумов**

Калининградский государственный технический университет  
Россия, г. Калининград, e-mail: [van-old@mail.ru](mailto:van-old@mail.ru)

## **ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ ГОДОВЫХ УРОВНЕЙ ВОДЫ В РЕКЕ ПРЕГОЛЕ**

*С помощью закономерностей теории вероятностей построен закон распределения максимальных годовых уровней воды в реке. Рассмотрен случай, когда известны плотность вероятности расходов и однозначная связь между максимальным расходом и уровнем в некотором створе реки. Полученная плотность вероятности позволяет рассчитывать максимальные годовые уровни реки Преголи заданной обеспеченности.*

**Ключевые слова:** уровень реки, расход воды, максимальные значения, плотность вероятности, кривая обеспеченности.

**V. A. Naumov**

Kaliningrad State Technical University  
Russia, Kaliningrad, e-mail: [van-old@mail.ru](mailto:van-old@mail.ru)

## **THE LAW OF DISTRIBUTION OF MAXIMUM ANNUAL WATER LEVELS IN THE PREGEL RIVER**

*The distribution law of maximum annual water levels is constructed with the help of probability theory regularities. The case when the probability density of the flow rate and the unambiguous relationship between the maximum flow rate and the level in a certain section of the river are known is considered. The obtained probability density makes it possible to calculate the maximum annual levels of the Pregel river of a given security.*

**Keywords:** river level, water consumption, maximum value, probability density, curve of the security.

## **Введение**

При проведении инженерно-гидрологических изысканий для строительства одним из самых важных параметров является максимальный расчетный годовой уровень воды в реке заданной обеспеченности  $P$  (вероятности превышения, выраженной, как правило, в процентах) [1]. Указанный уровень  $H_p$  находят из уравнения

$$100 \cdot (1 - G(H_p)) = P, \quad (1)$$

где  $G(H)$  – функция распределения максимальных годовых уровней, которую устанавливают по данным многолетних наблюдений.

В нормативных и методических документах [2, 3] подробно описана методика построения теоретических кривых распределения расходов водотока. Обоснование выбора функции распределения годового стока опубликовано в многочисленных трудах (см. [4-7] и библиографию в них). Тогда как проблема построения закона распределения уровней воды в реке остается малоисследованной. В [8] рассмотрен случай, когда известны плотность вероятности среднегодовых расходов и однозначная связь между расходом и уровнем в некотором створе реки. Была получена плотность вероятности и функция распределения, но только для среднегодовых уровней воды реки Преголи в створе города Гвардейска. В инженерных приложениях, в первую очередь, необходим закон распределения максимальных годовых уровней.

В данной статье используем зависимость расходов воды ( $\text{м}^3/\text{с}$ ) от максимальных годовых уровней в указанном выше гидростворе из [9]:

$$Q = \varphi(h) = 0,00451 \cdot (h - 516,9)^{2,06}, \quad (2)$$

где  $h$  – уровень воды в сантиметрах от «нуля поста»  $H_0 = -5,17$  м БС (метры Балтийской системы).

Выражая уровни (3) в метрах БС,  $h = 100(H + 5,17)$ , получим

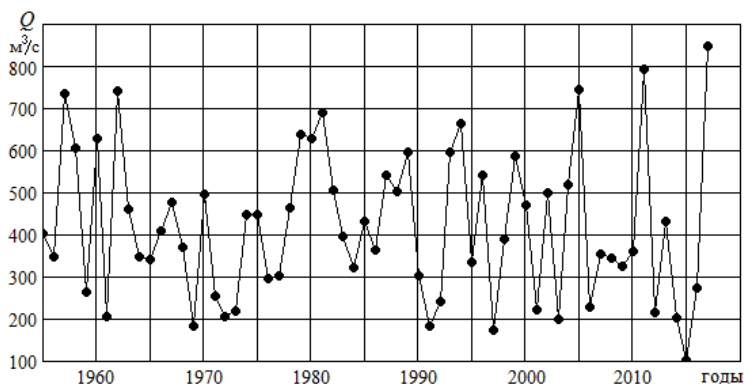
$$Q = \psi(H) = 59,45 \cdot (H + 0,001)^{2,06}. \quad (3)$$

## **Исходные данные**

Как и в [9], максимальные годовые расходы и уровни реки Преголи в створе города Гвардейска за 1955-1985 годы взяты из гидрологических

ежегодников ([10, 11] и т.д.), за 2008-2017 – данные Автоматизированной информационной системы государственного мониторинга водных объектов [12]. Остальные – из архива [13]. Таблица максимальных годовых расходов и уровней реки Преголи за 1955-2015 годы была представлена в [9]. В данной статье были добавлены результаты наблюдений 2016 и 2017 года. Поэтому общий объем выборки больше на 2, чем в [9],  $n = 63$ . Причем максимальный расход воды в 2017 году  $Q = 849 \text{ м}^3/\text{с}$  оказался наибольшим за рассматриваемый период наблюдений (рис. 1).

Проверка ряда максимальных годовых расходов по критериям Фишера и Стьюдента показала, что данные наблюдений не противоречат гипотезе об однородности данного ряда. Точечная оценка коэффициента автокорреляции между расходами смежных лет  $r(1) = 0,004$ . Это подтверждает возможность применения модели случайной величины.



**Рис. 1. Максимальные годовые расходы воды реки Преголи в створе города Гвардейска (1955-2017)**

### **Плотность вероятности максимальных годовых расходов**

По методике, предложенной в [9], сначала нужно получить плотность вероятности расходов воды в реке. Как правило, полагают, что для максимальных годовых расходов справедливо трехпараметрическое гамма-распределение Крицкого-Менкеля с плотностью вероятности [4-6]:

$$f(q) = \frac{1}{b \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \left( \frac{\Gamma(\alpha + b)}{\Gamma(\alpha)} \right)^{\frac{\alpha}{b}} \left( \frac{q}{\bar{Q}} \right)^{\frac{\alpha}{b} - 1} \exp \left[ - \left( \frac{\Gamma(\alpha + b)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{q}{\bar{Q}} \right)^{\frac{1}{b}} \right], \quad (3)$$

где  $\bar{Q} = 420 \text{ м}^3/\text{с}$  среднее многолетнее значение максимальных расходов. Два других параметра  $\alpha$  и  $b$  находим, решая численным методом систему уравнений [2]:



$$\lambda_2 + \ln \left( \frac{\Gamma(\alpha + b)}{\Gamma(\alpha)} \right) - \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \cdot \left( \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \cdot \ln(t) \cdot \exp(-t) dt \right) = 0; \quad (4)$$

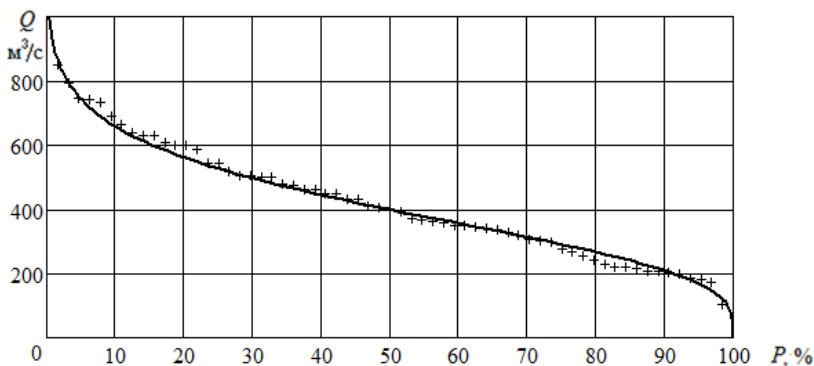
$$\alpha \cdot \lambda_2 - \left( \frac{\Gamma(\alpha + b)}{\Gamma(\alpha)} \right)^{1/b} \cdot \left[ \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n \left[ \ln(k_i) \cdot (k_i)^{1/b} \right] \right] + b = 0. \quad (5)$$

Значения величин, подставляемых в (4)-(5):

$$k_i = \frac{Q_i}{Q}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n \ln(k_i) = -0,0954. \quad (6)$$

Значения параметров распределения, рассчитанных по (4)-(6) для створа реки Преголи (Гвардейск)  $\alpha = 3,025$ ;  $b = 0,729$ .

На рис. 2 показано, что теоретическая кривая обеспеченности (вероятности превышения), рассчитанная по плотности распределения (3), хорошо согласуется с эмпирической, построенной по результатам наблюдений. Проверка по модифицированному критерию Пирсона дает высокий уровень значимости 0,63.



**Рис. 2.** Эмпирическая (точки) и теоретическая кривая обеспеченности максимальных годовых расходов воды реки Преголи (Гвардейск)

### Плотность вероятности максимальных годовых уровней

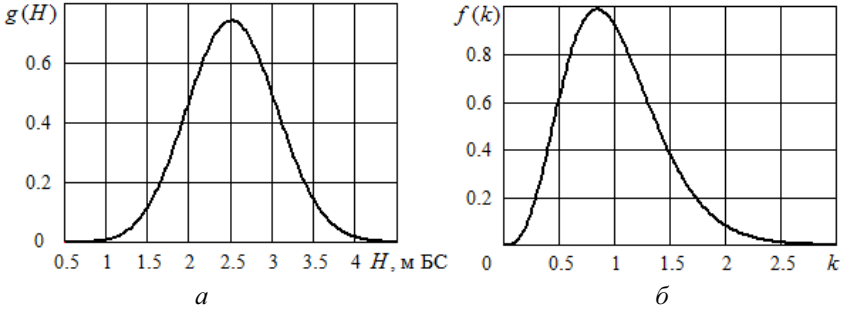
Зависимость  $\psi(H)$  является возрастающей. Для монотонной зависимости искомая плотность распределения находится по формуле [14]:

$$g(H) = f(\psi(H)) \cdot |\psi'(H)|. \quad (7)$$

В нашем случае производная функции по формуле (3)

$$\psi'(H) = 122,47 \cdot (H + 0,001)^{1,06}. \quad (8)$$

На рис. 3 представлены плотности вероятности:  $g(H)$  рассчитана по (7)-(8),  $f(k)$  – по формуле (3).



**Рис. 3. Плотности вероятности:**

$a$  – максимальных годовых уровней;  $b$  – модульных коэффициентов максимальных расходов реки Преголи

Функция распределения, которая используется в формуле (1), может быть найдена численным интегрированием:

$$G(H) = \int_0^H g(h) dh. \quad (9)$$

Рассчитанные по плотности вероятности максимальных годовых расходов (3) показатель асимметрии и эксцесс распределения  $Q$  составили, соответственно,  $Aq = 0,695$ ;  $Eq = -0,613$ .

По плотности вероятности  $g(h)$  с помощью численного интегрирования были найдены точечные оценки параметров распределения максимальных годовых уровней воды в реке Преголе (Гвардейск).

Математическое ожидание

$$m_h = M[H] = \int_0^6 h \cdot g(h) dh = 2,437 \text{ м}.$$

Среднее квадратичное отклонение

$$\sigma_h = \sqrt{\int_0^6 (h - m_h)^2 \cdot g(h) dh} = 0,513 \text{ м}.$$

Показатель асимметрии распределения  $H$

$$Ah = \frac{1}{\sigma_h^3} \int_0^6 (h - m_h)^3 \cdot g(h) dh = -0,454.$$

Эксцесс распределения  $H$

$$Eh = 3 - \frac{1}{\sigma_h^4} \int_0^6 (h - m_h)^4 \cdot g(h) dh = -0,050.$$

Показатель асимметрии поменял знак, что заметно и на рис. 3.

### **Заключение**

С помощью закономерностей теории вероятностей построен закон распределения максимальных годовых уровней воды. Рассмотрен случай, когда известны плотность вероятности расходов и однозначная связь между максимальным расходом и уровнем в некотором створе реки. Полученная плотность вероятности позволяет рассчитывать максимальные годовые уровни реки Преголи заданной обеспеченности. Плотности вероятности максимальных годовых расходов и уровней реки Преголи существенно отличаются. У первой показатель асимметрии положительный, а у второй – отрицательный. Эксцесс распределения в обоих случаях отрицательный, но в первом случае его модуль заметно больше.

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Свод правил СП 47.13330.2012. Инженерные изыскания для строительства. Утвержден приказом Госстроя России № 83/ГС от 10 декабря 2012 г.
2. Свод правил СП 33-101-2003. Определение основных расчетных гидрологических характеристик. Одобрен для применения в качестве нормативного документа постановлением Госстроя России № 218 от 26 декабря 2003 г.
3. Методические рекомендации по определению расчетных гидрологических характеристик при наличии данных гидрометрических наблюдений / под ред. А.В. Рождественского. Нижний Новгород: Вектор-ТиС, 2007. 133 с.
4. *Картвелишвили Н.А.* Стохастическая гидрология: монография. Л.: Гидрометеопиздат, 1981. 167 с.
5. *Музылев С.В.* Стохастические модели в инженерной гидрологии: монография / С.В. Музылев, В.Е. Привальский, Д.Я. Раткович. М.: Наука, 1982. 184 с.
6. *Сикан А.В.* Методы статистической обработки гидрометеорологической информации: учеб. пособие. СПб: Изд-во РГГМУ, 2007. 279 с.
7. *Наумов В.А.* Инженерные изыскания в бассейне реки Преголи: монография / В.А. Наумов, Н.Р. Ахмедова. Калининград: Изд-во КГТУ, 2017. 183 с.
8. *Ахмедов И.М.* Плотность вероятности уровня воды в реке при известном законе распределения расхода / И.М. Ахмедов, В.А. Наумов // Материалы V Международ. Балтийского морского форума (Калининград, 21-27 мая 2017 г.). Калининград: Изд-во БГАРФ, 2017. С. 676-680.
9. *Наумов В.А.* Уравнение регрессии максимальных годовых уровней и расходов реки // Математика и естественные науки. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Вып. 13. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2018. С. 195-200.

10. Гидрологический ежегодник 1955 г. Т. 1. Бассейн Балтийского моря / под ред. Л.И. Глазачевой. Вып. 4-6. Л.: Гидрометеониздат, 1959. 633 с.
11. Гидрологический ежегодник 1956 г. Т. 1. Бассейн Балтийского моря / под ред. Л.И. Глазачевой. Вып. 4-6. Л.: Гидрометеониздат, 1960. 401 с.
12. Автоматизированная информационная система государственного мониторинга водных объектов [Электронный ресурс]. Режим доступа – по паролю. URL: <https://gmvo.skniivh.ru/> (дата обращения: 07.01.2019).
13. ГИС-портал Центра регистра и кадастра [Электронный ресурс]. Режим доступа – по паролю. URL: <http://gis.waterinfo.ru/> (дата обращения: 07.01.2019).
14. *Вентцель, Е.С.* Теория вероятностей: учебник М.: КНОРУС, 2010. 664 с.

УДК 531, 519.6

**И. А. Панкратов, К. Р. Симонова**

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
Россия, г. Саратов, *e-mail: pankratovia@info.sgu.ru, k11sim@mail.ru*

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ПЛАСТИНЫ СРЕДСТВАМИ OPENFOAM**

*В данной статье рассмотрена математическая модель обтекания пластины вязкой жидкостью. Для расчёта нестационарного течения жидкости был применён метод конечных объёмов. Расчёты были произведены в свободно распространяемом пакете OpenFOAM. Рассмотрены различные решатели пакета OpenFOAM: icoFoam, pisoFoam, simpleFoam, pimpleFoam. Приведены примеры численного решения для различных параметров задачи.*

**Ключевые слова:** метод конечных объёмов, уравнения Навье-Стокса, OpenFOAM.

**I. A. Pankratov, K. R. Simonova**

G.N. Chernyshevsky National Research Saratov State University  
Russia, Saratov, *e-mail: pankratovia@info.sgu.ru, k11sim@mail.ru*

## **MATHEMATICAL MODELING OF THE FLOW AROUND PLATE BY OPENFOAM PACKAGE**

*In this paper, we consider a mathematical model of a viscous liquid flow around plate. The finite volume method was applied to calculate the unsteady flow of water. Calculations were made in a freely distributed package OpenFOAM. The following solvers of the OpenFOAM package were considered: icoFoam, pisoFoam, simpleFoam, pimpleFoam. Examples of a numerical solution for various parameters of the problem are given.*

**Keywords:** finite volume method, Navier-Stokes equations, OpenFOAM.

В настоящей работе рассмотрена задача обтекания неподвижного твердого тела потоком вязкой несжимаемой жидкости. Такой процесс описывается нестационарной системой уравнений Навье-Стокса. Указанные уравнения могут быть решены аналитически лишь в некоторых частных случаях (см., например, течения Куэтта и Пуазейля). Поэтому актуальным является их численное исследование. Традиционно при проведении математического моделирования того или иного течения жидкости применяется метод конечных разностей [1]. При этом значения искоемых параметров (скорость, давление и т. д.) находятся лишь в конечном наборе точек, принадлежащих расчётной области. Ранее И.А. Панкратовым в работах [2–5] был применён метод взвешенных невязок [6, 7]. В этом случае искомые гидродинамические величины (скорость, функция тока и т.д.) были представлены в виде линейной комбинации базисных функций.

В данной работе в качестве инструмента для математического моделирования обтекания и расчёта коэффициента лобового сопротивления тела использован пакет прикладных программ OpenFOAM (Open Source Field Operation And Manipulation CFD ToolBox) [8], в котором реализован метод конечных объёмов. OpenFOAM – это открытая интегрируемая платформа для численного моделирования задач механики сплошных сред. Она представляет собой свободно распространяемый инструментальный вычислительный гидродинамики для операций с полями (скалярными, векторными и тензорными). В настоящее время OpenFOAM является одним из наиболее известных приложений, предназначенных для вычислений с помощью метода конечных объёмов. В состав пакета OpenFOAM входит набор утилит, решателей и средств отображения результатов. Целью данной работы является сравнение работы стандартных решателей OpenFOAM в задаче обтекания пластины ламинарным потоком вязкой несжимаемой жидкости.

В OpenFOAM для решения задач о течении вязкой несжимаемой жидкости определены следующие решатели: isoFoam (ламинарное течение несжимаемой ньютоновской жидкости); pisoFoam (турбулентное течение несжимаемой жидкости, для решения уравнения неразрывности использован PISO алгоритм); simpleFoam (стационарное течение несжимаемой жидкости с моделированием турбулентности, для решения уравнения неразрывности использован SIMPLE алгоритм); rimpleFoam (турбулентное течение несжимаемой жидкости с использованием большого шага по времени, для решения уравнения неразрывности использован PIMPLE (объединенный PISO-SIMPLE) алгоритм). В трех последних решателях присутствует опция для моделирования ламинарного потока.

Заметим, что ранее с помощью пакета OpenFOAM в работе [9] было проведено математическое моделирование одномерных течений несжимаемой жидкости. Установлено, что результаты численных экспериментов согласуются с известными точными решениями для течений Куэтта и Пуазейля.

В качестве расчетной области был выбран прямоугольный параллелепипед, длины ребер которого равны 1 м, 0.6 м и 0.4 м соответственно. Центр обтекаемого тела располагается в начале системы координат и смещается с центром параллелепипеда.

Фоновая сетка (домен) размера  $50 \times 30 \times 20$  ячеек создается с помощью утилиты blockMesh. Для построения более мелкой сетки в области, окружающей обтекаемое тело, была использована утилита snappyHexMesh. Геометрия обтекаемого тела хранится в STL-файле. Для более тонкой настройки сетки задается несколько ограничивающих обтекаемое тело регионов. Для каждого региона задаются параметры построения сетки, отличные от параметров для всей поверхности.

Процесс улучшения качества сетки вблизи поверхности обтекаемого тела состоит из следующих шагов:

1) расщепление ячеек сетки, которые пересекают поверхность обтекаемого тела;

2) исключение тех ячеек, которые оказались внутри (более 50% объема) обтекаемого тела. На данном этапе граница сетки представляет собой зубчатую поверхность;

3) расщепление ячеек сетки, которые лежат внутри некоторой заданной области, окружающей обтекаемое тело. В этой области требуются более точные расчеты;

4) т.н. снэппинг: вершины ячеек передвигаются на поверхность обтекаемого тела, таким образом сглаживается зубчатая поверхность сетки. Путем итерационной процедуры улучшается качество сетки, нарушенное после смещения вершин ячеек;

5) вокруг поверхности обтекаемого тела вводятся дополнительные слои сетки, состоящие из гексаэдральных ячеек и выровненные по поверхности тела. Этот шаг позволяет избежать нерегулярности и неортогональности сетки вблизи поверхности обтекаемого тела.

Необходимо отметить, что в ходе ряда вычислительных экспериментов было установлено, что размер домена, позволяющий получить адекватные результаты, должен быть не менее чем в 5 раз больше размера обтекаемого тела в каждом из направлений.

Граничные условия формулируются следующим образом. На поверхности пластины для скорости ставится условие прилипания; для давления – равенство нулю производной по нормали. На входе в расчетную область задается равномерный горизонтальный поток с фиксированной скоростью  $V_x$  (м/с) на достаточно большом удалении от тела. На боковых границах расчетной области формулируется условие проскальзывания. Такое условие предполагает, что на боковых границах поток уже является практически невозмущенным.

На выходе из расчетной области ставятся «мягкие» граничные условия, соответствующие равенству нулю производной по нормали от скоро-

сти. Для давления такое же условие ставится на всей границе расчетной области, за исключением выхода из расчетной области, где давление считается постоянным.

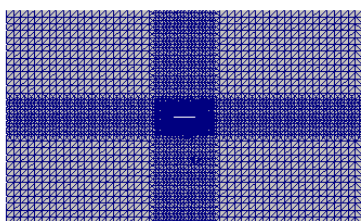
Сравнение работы решателей производилось для задачи обтекания пластины ламинарным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Для моделирования ламинарного режима течения число Рейнольдса выбиралось исходя из условия  $Re < 400$ . Для решения систем линейных алгебраических уравнений использовались итерационные подпрограммы GAMG и PBiCGStab, использующие многосеточный метод и стабилизированный метод бисопряжённых градиентов. В качестве метода сглаживания для GAMG был выбран метод GaussSeidel. В качестве предобуславливателя для PBiCGStab был выбран DILU, основанный на упрощенной неполной LU-факторизации.

В табл. 1 приведены значения коэффициента сопротивления для пластины, полученные в данной работе.

**Таблица 1. Коэффициент лобового сопротивления пластины (OpenFOAM)**

Re	simpleFoam	pisoFoam	pimpleFoam	icoFoam
100	0.2915	0.2914	0.3597	0.2963
200	0.1834	0.1834	0.2540	0.1856

На рис. 1 приведена картина обтекания пластины. Визуализация параметров течения была произведена с помощью открытого графического пакета ParaView [10].



*a* – Сетка



*b* – Продольная компонента скорости

**Рис. 1. Картина обтекания пластины**

Следовательно, можно сделать вывод о том, что для выбранного диапазона чисел Рейнольдса  $100 \leq Re \leq 200$  данные численных экспериментов хорошо согласуются между собой (отметим, что алгоритм PIMPLE завышает значения коэффициента лобового сопротивления). Решатели simpleFoam, pisoFoam, pimpleFoam обладают достаточно быстрой сходимостью к установившемуся течению. Но они имеют различия в скорости

работы. Если для simpleFoam время поиска решения составляло порядка 10 минут, то для pisoFoam и pimpleFoam оно составило от 10 до 20 минут. Решатель isoFoam показал худший результат по скорости сходимости к решению (свыше 1,5 часов).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.
2. Панкратов И.А. Изчисляване на линията на тока по време на циркуляция, предизвикана от ветрове // Парадигма. 2016. Т. 1, № 1. С. 115-119.
3. Панкратов И.А. Численная аппроксимация линий тока методом Галёркина // *Juvenis Scientia*. 2016. № 2. С. 4-6.
4. Панкратов И.А. Расчёт течений мелкой воды / И.А. Панкратов, Д.С. Рымчук // Математика. Механика. 2014. № 16. С. 120-124.
5. Ильясова Т.А. Математическое моделирование циркуляции воды в озере / Т.А. Ильясова, И.А. Панкратов // Математика. Механика. 2015. № 17. С. 101-104.
6. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. М.: Мир, 1986. 318 с.
7. Коннор Дж. Метод конечных элементов в механике жидкости / Дж. Коннор, К. Бреббиа. Л.: Судостроение, 1979. 264 с.
8. Официальный сайт OpenFOAM [Электронный ресурс]. URL: <http://openfoam.org> (дата обращения 15.01.2019).
9. Панкратов И.А. Математическое моделирование некоторых нестационарных течений жидкости средствами пакета OpenFOAM // Моделирование. Фундаментальные исследования, теория, методы и средства: Материалы 17-й Международ. молодеж. науч.-практ. конф. 2017. С. 63-67.
10. Официальный сайт ParaView [Электронный ресурс]. URL: <http://www.paraview.org> (дата обращения 15.01.2019).

УДК 625.084

**Ю. Г. Попов, Е. К. Чабуткин, Н. Е. Тарасова**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: [uri.haladdin@gmail.com](mailto:uri.haladdin@gmail.com),  
[chabutkin-ek@yandex.ru](mailto:chabutkin-ek@yandex.ru), [tarasovane@ystu.ru](mailto:tarasovane@ystu.ru)

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА УПЛОТНЕНИЯ АСФАЛЬТОБЕТОННЫХ ПОКРЫТИЙ**

*В технологическом процессе строительства автомобильных дорог наиболее важной является операция уплотнения. Среди множества дорожно-строительных материалов процесс уплотнения асфальтобетонных покрытий наиболее сложно поддается алгоритмизации в силу большого количества факторов, влияющих на него. В данной работе показаны методические подходы по определению*



нию комплектов машин и режимов вибрационного воздействия на уплотняемый материал каждым катком. Предлагается проводить оптимизацию параметров технологического процесса на основе анализа четвертой координаты.

**Ключевые слова:** покрытие асфальтобетонное, уплотнение, каток, комплект машин, режим работы, модель, оптимизация параметров.

**Ju. G. Popov, E. K. Chabutkin, N. E. Tarasova**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: uri.haladdin@gmail.com,  
chabutkin-ek@yandex.ru, tarasovane@ystu.ru

## **MODELING OF TECHNOLOGICAL PROCESS OF COMPACTION OF ASPHALT-CONCRETE PAVEMENTS**

*In the technological process of road construction the most important is the operation of compaction. Among the many road construction materials, the process of compaction of asphalt concrete coatings is the most difficult to algorithmize due to a large number of factors affecting it. This paper shows the methodological approaches to the definition of sets of machines and modes of vibration impact on the compacted material by each roller. It is proposed to optimize the process parameters based on the analysis of the fourth coordinate.*

**Keywords:** asphalt concrete pavement, compaction, roller, set of machines, mode of operation, model, optimization of parameters.

В технологическом процессе строительства автомобильных дорог наиболее сложным является процесс формирования плотной и прочной структуры асфальтобетонного покрытия. Если выбор типа катка под конкретные условия обычно не вызывает трудностей, то значительно сложнее подобрать массу катка и режим его работы. Причем от правильного выбора этих параметров во многом зависит эффективность процесса уплотнения. При оптимальном подборе режимов работы уплотняющей машины возможно сокращение времени работы катка до 40-50% по сравнению с общепринятой методикой [1].

Получить требуемое качество уплотнения возможно любым из допустимых катков и выбранным для него режимом работы. Однако при использовании современных энергонасыщенных катков фактор сокращения времени их работы (увеличения производительности) выходит едва ли не на первое место.

В результате уплотнения должна быть получена не только требуемая плотность материала по всей толщине слоя, но и сформирована прочная его структура. Для этого контактное давление под рабочим органом машины должны быть близким к пределу прочности материала, но не превышать его не только в конце уплотнения, но и в течение всего процесса.

При нарастании плотности, повышается и предел прочности самого материала, а значит, необходимо изменение контактных давлений на протяжении всего процесса уплотнения.

Таким образом, постепенное увеличение контактных давлений – основное правило уплотнения, обеспечивающее получение плотной и прочной структуры. Нарастания контактных давлений можно добиться двумя способами:

- применением комплекта катков с переходом от более легкого к более тяжелому;

- применением машин, позволяющих регулировать величину контактных давлений за счет включения вибрации (вибрационные катки) или регулирования давления воздуха в шинах (пневмошинные катки).

Оптимизация комплекта машин для уплотнения различных дорожно-строительных материалов – задача довольно сложная и решить ее возможно с использованием подходов, описанных в работе [2] .

Система «рабочий орган» - «уплотняемый материал» характеризуется большим количеством взаимозависимых связей, что позволяет получить множество возможных вариантов как по выбору режимов работы вибрационного катка, так и параметров самой машины.

В то же время, рассматривая систему в целом («рабочий орган»-«уплотняемый материал») можно предположить, что изменение каких-либо характеристик, параметров или показателей элемента системы в той или иной мере повлияет на остальные. Это, в свою очередь, означает большое число возможных вариантов по выбору параметров и режимов работы вибрационного катка, что затрудняет задачу определения рациональных условий производства работ. Вместе с тем, расчетные модели, описывающие взаимодействие рабочих органов уплотняющих машин с материалом должны удовлетворять также определенным требованиям, что, в свою очередь, сужает общее количество вариантов решения задачи и объем учитываемых параметров.

При построении расчетной модели, описывающей технологический процесс уплотнения (т.е. модели, позволяющей выявлять и анализировать взаимосвязи между машиной и опорным основанием), целесообразно использовать блочно-иерархический принцип описания объектов.

В общем виде, структура такой модели может быть представлена следующим образом (рис. 1).

На рис. 1:  $R$  – группа характеристик, выражающих свойства уплотняемого материала, параметры уплотняющей машины, режимы ее работы и т.д., получаемых в ходе выполнения последовательности шагов при решении задач определения режима работы;  $S$  – группа шагов, выполняемых при решении задачи выбора параметров или режимов работы уплотняющей машины.

Тогда в общем виде можно записать

$$R = \{R^0\} \cup \{R_n^L \mid n, L \in N\}, \quad S = \{S^0\} \cup \{S_n^L \mid n, L \in N\},$$

где  $N$  – множество целых положительных чисел;  $R^0$  – исходные характеристики (включая граничные условия и т.д.);  $R_n^L$  – характеристики машины и уплотняемого материала, полученные в ходе решения задачи на уровне  $L$ . На одном уровне такая задача решается  $n$  раз.

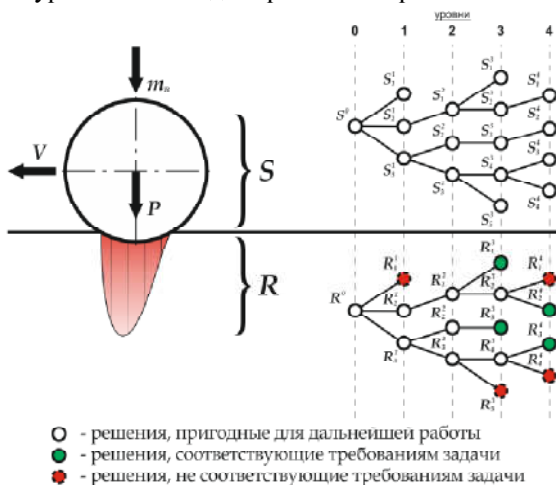


Рис. 1. Структурная схема процесса уплотнения

Взаимные иерархические связи  $S$  и  $R$  удобно представить в виде идентичных структур. Один цикл процесса  $S$  представляет совокупность действий, в результате которой изменяются характеристики  $R$ . В этом случае количество уровней  $L$  будет одинаковым для обеих систем. При решении реальных задач, иерархия  $S$  может иметь собственные подуровни, облегчающие представление шагов, предполагающих изменение двух и более параметров системы. В то же время один шаг процесса  $S$ , представляющий собой определенную задачу, может иметь более одного решения.

Так как обе системы взаимосвязаны, выбор последующих шагов  $S$ , осуществляется на основании полученных на предыдущем уровне результатов  $R$ , и наоборот, полученные результаты  $R$  будут зависеть от шагов, но сделанных на текущем уровне, а также от результатов, полученных на предыдущем уровне (рис. 2). Тогда в общем виде можно записать

$$S_n^L = S_j^{L-1} \cup S(R_j^{L-1}), \quad R_n^L = R_j^{L-1} \cup R(S_n^{L-1}),$$

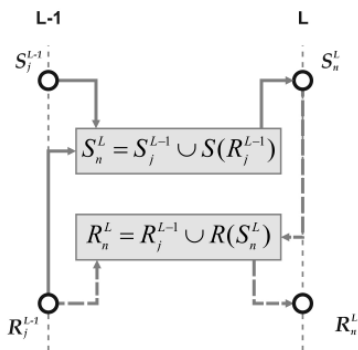
где  $S_j^{L-1}$  – последовательность из выполненных  $(L-1)$  шагов;  $S(R_j^{L-1})$  – функция выбора следующего шага, на основании полученного на  $(L-1)$ -м

шаге результата;  $R_j^{L-1}$  – результаты, полученные на  $(L-1)$ -м уровне;  $S(R_j^L)$  – функция расчета результатов, в соответствии с шагами  $S_j^L$ .

В ходе последовательного определения характеристик  $R_j^L$  должна выполняться проверка на соответствие полученных результатов требованиям, определенным в исходных и требуемых характеристиках и граничных условиях.

При этом возможно получение трех типов результатов: *результаты, пригодные* для совершения дальнейших шагов  $S$ ; *плохие результаты* (не позволяющие совершать дальнейшие действия, например, разрушающие покрытие) и *завершающие результаты*.

Определение результатов первого типа можно описать формальной функцией, выходным параметром которой являются «координаты» решений, определенного вида  $j = f(R_n^{L-1}, S_n^{L-1}, R^0)$ .



**Рис. 2. Принципиальная схема выбора следующего шага и определения получаемого результата**

Таким образом,  $j$  – это номера шагов предыдущего (относительно рассчитываемого) уровня, пригодные для дальнейшей работы.

Третий тип результатов, завершающие, представляет собой два множества характеристик, отражающие решения, соответствующие поставленной цели  $R_x$  и не соответствующие -  $R_p$ . На графах (см. рис. 1) они обозначены, соответственно, заштрихованными окружностями. Принадлежность результата к этим множествам может определяться прямым сравнением с эталоном (например, достижение каким-либо параметром определенной величины), но формально можно ввести функцию  $f(R_n^L, R^0)$ , которая при вычислении может принимать значения от 0 до 1. Тогда окончательный выбор множеств «хороших» и «плохих» решений будет определяться следующим образом:

$$\begin{cases} R_n^L \in R_x, & \text{если } f(R_n^L, R^0) = 1, \\ R_n^L \in R_p, & \text{если } f(R_n^L, R^0) < 1 \text{ и } n \neq j. \end{cases}$$

При этом полученные на определенном шаге результаты принадлежат к множеству положительных решений, если выполняется условие  $f(R_n^L, R^0) = 1$ , и принадлежат к множеству «плохих» решений, если условия функции не выполняются, и одновременно номер решения не принадлежит к множеству  $j$ .

Данный подход позволяет легко описать развитие процесса выбора параметров или режимов работы как одного катка, так и отряда катков. Результатом выполнения всех операций процесса, является множество решений (как удачных  $R_x$ , так и неудачных  $R_p$ ), что, в свою очередь, позволяет легко получить как количественную оценку решений, с определением оптимального, так и качественную, позволяющую оценить систему в целом.

В первом приближении, алгоритм действия при определении оптимального состава отряда катков и выбора оптимальных режимов работы всех катков из состава отряда выглядит следующим образом.

Имеется ряд катков  $K_1, \dots, K_i, \dots, K_n$  с исходными управляемыми параметрами  $m_i, V_i, P_i, \omega_i$ . Здесь  $m_i$  – масса катка, приходящаяся на один рабочий орган;  $V_i$  – рабочая скорость катка;  $P_i$  – величина вынуждающей силы вибровозбудителя;  $\omega_i$  – частота вибрации.

При этом известен тип уплотняемого материала, характеризующийся определенными физико-механическими характеристиками ( $E_j$ ), характеристики состояния материала при уплотнении ( $E_{yj}$ ), толщина уплотняемого слоя ( $H_{yjn}$ ), исходный и требуемый коэффициенты уплотнения материала ( $K_y^{ucx}, K_y^{mp}$ ). Могут варьироваться и параметры уплотняемого участка, т.е его дина  $L$  и ширина  $B$ .

Понятно, что это множество характеристик оказывает непосредственное влияние на процесс уплотнения. Т.е. можно записать  $R = F(m_i, V_i, P_i, \omega_i, E_{yj}, H_{yjn}, K_y^{ucx}, K_y^{mp}, L, B)$ .

При этом возникает многовариантность решения и возможно множество шагов  $S$ , при выполнении которых будет достигнута поставленная цель – получение требуемого коэффициента уплотнения, либо будет получено решение не соответствующее требованиям задачи.

Понятно, что в этом случае, можно достичь желаемого результата (получения требуемого качества уплотнения) различными путями. Однако время, затраченное на формирование плотной структуры материала, при различных решениях будет различным. При этом и затраты на выполнение процесса уплотнения, при применении современных энергонасыщенных машин, будут сильно отличаться.

В этом случае, найти оптимальное решение можно методом анализа четвертой координаты, предложенным В.И. Баловневым [3]. Эта характе-

ристика является функцией эксплуатационных параметров машины или комплектов машин. При этом не учитывается взаимовлияние операций, которые в ряде случаев предъявляют к техническим параметрам машины противоречивые требования.

Эффективность процесса уплотнения определяется эффективностью протекания операций передвижения уплотняющей машины с одновременным уплотнением материала. Рабочий цикл виброуплотняющей машины включает в себя выполнение практически двух операций, протекающих одновременно. Это позволяет рассматривать машину как систему с рабочим циклом с совмещенными рабочими операциями. Метод минимизации четвертой координаты (продолжительности) рабочего процесса позволяет определить ряд оптимальных параметров и режимом работы машины.

При выполнении задачи формирования комплекта катков приходится решать одну из следующих задач:

1. Выбор эффективности работы катков в комплекте;
2. Разбивка толщины слоя на послойное;
3. Комплексная задача (слои из различных дорожно-строительных материалов).

При этом приходится проводить двухуровневую оптимизацию: оптимизацию по режимам работы каждой отдельной машины; определение оптимальных моментов перехода с одной машины на другую, за исходные взяв данные, получаемые в конце процесса уплотнения предыдущей машины.

Задача оптимизации режимов работы отдельного катка уже решена с использованием программного комплекса "Vibkat" [4]. Однако в целом ряде случаев не удаётся подобрать один каток для выполнения поставленной задачи. Поэтому приходится формировать их отряд.

Решение этой задачи связано с определением моментов перехода с одного катка на другой. Проще всего решить эту задачу исходя из анализа четвертой координаты (оптимизация времени работы комплекта катков).

В качестве исходных данных по объекту являются: объём работ, геометрические размеры объекта, время работ, требуемый коэффициент уплотнения, толщина отсыпаемого слоя. Исходя из этих условий, производится подбор машин из имеющейся базы катков с дальнейшим расчетом режимов работы: скорость  $V$ , достигаемый коэффициент уплотнения  $K_y$ , число проходов  $N_{np}$  и время выполнение работ  $T$ .

Предлагаемая методика основана на выборе катка с определенными характеристиками из имеющейся базы данных. При этом производится расчет режимов работы выбранного катка и осуществляется формирование «Базы 1» или «Базы 2». Оценка выборки должна проводиться исходя из стоимости машино-смены и времени уплотнения слоя дорожно-строительного материала, при этом, если ни один из катков «Базы 1» (рис. 3) либо комплект катков («База 2») не достиг требуемого коэффициента уп-

лотнения при указанной толщине слоя, то необходимо разбить уплотняемый материал по слоям и сформировать «Базу 3», для того чтобы выполнить данную задачу.

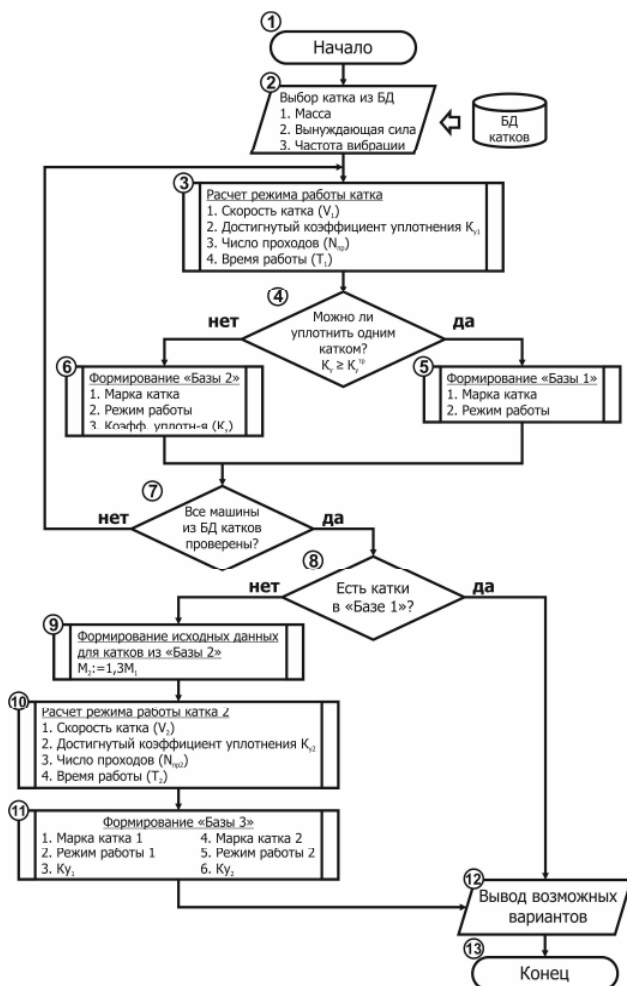


Рис. 3. Блок-схема формирования комплектов уплотняющих машин

Переход к задаче по формированию отряда катков, осуществляется в блоке 8, при этом требуется ввести исходные данные для каждого катка по достигнутым результатам из «Базы 2». Далее необходимо повторно провести подбор уже более тяжелого катка с дальнейшим расчетом его

режимов работы. При достижении необходимого коэффициента уплотнения формируется «База 3» (комплекты катков) и выводится печать полученных вариантов комплектов с анализом их эффективности, тем самым добившись основной цели. При использования методов оптимизации (например, метода паретровских решений) из большого количества возможных вариантов можно оставить только ограниченное количество – наиболее эффективные.

На основе разработанной методики возможно создать программный комплекс по автоматизированному формированию комплекта катков, для выполнения поставленных задач на основе анализа четвертой координаты (времени работы комплекта катков) и формирования необходимых технологических режимов для каждой машины.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чабуткин Е.К.* Влияние рабочей скорости вибрационных катков на уплотнение горячих асфальтобетонных смесей / Е.К. Чабуткин, Ю.Г. Попов, Д.О. Шумаков // 64 региональная науч.-техн. конф. студентов, магистрантов, аспирантов высш. учеб. заведений с междунар. участием. 20 апреля 2011 г. Ярославль: ЯГТУ, 2011. 377 с.
2. *Попов Ю.Г.* Методика определения рациональных параметров и режимов работы вибрационных катков: дис. ... канд. техн. наук: 05.05.04 [Место защиты: Моск. автомобил.-дорож. гос. техн. ун-т]. Ярославль, 2012. 183 с.
3. *Баловнев В.И.* Определение оптимальных параметров и выбор дорожно-строительных машин методом анализа четвертой координаты: учеб. пособие. М.: МАДИ, 2014. 180 с.
4. *Чабуткин Е.К.* Методика расчета режима работы вибрационного катка при уплотнении горячих асфальтобетонных смесей / Е.К. Чабуткин, И.С. Тюрменов, Ю.Г. Попов // Вестник информационных технологий. 2012. №5. С.10-13.

УДК 519.21:621.81

**Т. А. Сычева, А. Н. Буланов**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: [tatianasycheva@bk.ru](mailto:tatianasycheva@bk.ru), [bulanovan@ystu.ru](mailto:bulanovan@ystu.ru)

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ ПРИ РАСЧЕТЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ОТКАЗОВ**

*Рассматриваются этапы проектирования и разработки продукции с учетом существующих инженерных методов, а также использование математической вероятности для расчета появления отказа по детали, узлу.*

**Ключевые слова:** проектирование и разработка продукции, DFMEA, PFMEA, APQP, MTFB, математическая вероятность.



T. A. Sycheva, A. N. Bulanov

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: [tatianasycheva@bk.ru](mailto:tatianasycheva@bk.ru), [bulanovan@ystu.ru](mailto:bulanovan@ystu.ru)

## MATHEMATICAL PROBABILITY AT CALCULATION OF CANCELLATION OF FAILURES

We consider the stages of design and product development, taking into account existing engineering methods, as well as the use of mathematical probability to calculate the occurrence of a failure by part, node.

**Keywords:** product design and development, DFMEA, PFMEA, APQP, MTBF, mathematical probability.

В настоящее время разработано множество ГОСТов, в части разработки продукции и постановки на производство. Все они сводятся к составлению некоего плана графика выполнения работ, с важным утверждением у того или иного владельца процесса. Все это в итоге влияет на качество конечного изделия, но при этом ошибки, которые возникают, в результате выявляются непосредственно у потребителя. При этом 80% всех отказов (дефектов) связаны с конструкцией.

При планировании производства новой продукции чаще всего используют Advanced product quality planning (далее, APQP) – календарный график планирования качества продукции, представленный на рис. 1 [1].



Рис. 1. Календарный график планирования качества продукции

Зачастую, при таком полномасштабном развернутом планировании на реализацию проекта нового транспортного средства уходит от 14 до 48 месяцев. И после запуска в производство идет последующая доработка конструктива и изготовление новых компонентов. При этом идёт накопление анализа видов и последствий отказов конструкции – Design Failure Mode and Effects Analysis (далее DFMEA) и анализа видов и последствий отказов процессов – Process Failure Mode and Effects Analysis (далее PFMEA), чертежей с различными индексами после доработки, специальные характеристики и планы управления. Более подробно рассмотрим процесс валидации продукции и процесса.

Данный раздел описывает основные особенности валидации производственного процесса посредством оценки значимого цикла производства. Во время значимого цикла производства команда организации по планированию качества продукции должна подтвердить, что план управления и карта потока процесса соблюдаются, и продукция соответствует требованиям потребителя. Следует выявить, исследовать и устранить все возможные недостатки до начала серийного производства.

Входы и выходы процесса представлены в табл. 1.

**Таблица 1. Входы и выходы процесса**

Входы процесса	Выходы процесса
– стандарты и технические условия на упаковку;	– значимый цикл производства;
– анализ системы качества для продукции/процесса;	– оценка измерительных систем;
– карта потока процесса;	– предварительное изучение возможностей процессов;
– чертеж плана цеха;	– одобрение производства части;
– матрица характеристик;	– испытания с целью валидации производства;
– анализ видов и последствий отказов процесса (PFMEA);	– оценка упаковки;
– план управления для установочной серии;	– план управления для серийной продукции;
– инструкции;	– завершение планирования качества и поддержка руководства.
– план анализа измерительных систем;	
– план предварительного изучения возможностей процессов;	
– поддержка руководства.	

Валидация продукции и процесса осуществляется в восемь этапов. Рассмотрим каждый из них:

**1) Значимый цикл производства.**

Должен осуществляться с использованием производственной оснастки и инструмента, производственного оборудования, производственной среды (включая операторов производства), средств обслуживания измерительных приборов и в установленном производственном темпе. Валидация результативности процесса производства начинаться со значимого цикла производства – процесса согласования производства части, иначе Production Part Approval Process (далее PPAP). Минимальное количество изделий значимого цикла производства обычно устанавливается потребителем, но может быть пересмотрено командой организации по планированию качества продукции в сторону увеличения. Выход (продукция) значимого цикла производства используется:

- для предварительного изучения возможностей процессов;
- анализа измерительных систем;
- демонстрации темпа производства;
- анализа процессов;
- испытаний с целью валидации производства;
- одобрения производства части;
- оценки упаковки;
- оценки первоначальных возможностей (далее FTC);
- подписания документа о завершении процесса планирования качества (акта готовности производства);
- отборе образцов изготовленной продукции;
- отборе контрольного образца (если требуется).

Прежде чем идти далее по проектированию, рассмотрим возможности применения теории вероятности при разработке процессов и деталей, и их времени выхода из строя (потенциальные дефекты, когда они появятся в эксплуатации).

Организация должна разработать, ввести в действие и поддерживать документированную систему всеобщего продуктивного обслуживания.

Как минимум, система должна включать следующее:

- а) идентификацию оборудования процессов, необходимого для производства соответствующей продукции в требуемом объеме;
- б) наличие заменяемых частей для оборудования, идентифицированного в пункте а);
- в) предоставление ресурсов для обслуживания станков, оборудования и помещений;
- г) упаковку и предохранение оборудования, инструментальной оснастки и контрольно-измерительных средств;
- д) применимые специфические требования потребителя;

е) документированные цели в области обслуживания, например, среднее время между отказами – Mean Time Between Failure (далее МТВФ) и метрики выполнения требований предупредительного обслуживания. Результаты функционирования согласно целям, в области обслуживания должны формировать входные данные для рассмотрения руководством (ISO 9001, раздел 9.3) [2, 3].

Для наглядного примера рассмотрим две системы, которые проработали одно и то же время за два месяца. Первый месяц у системы 1 среднее время между отказами равно 25. В тот же месяц у системы 2 среднее время между отказами равно 30. Следующие месяцы МТВФ системы 1 было равно 46, а у системы 2 МТВФ – 50. Данные представлены в табл. 2.

**Таблица 2. Исходные данные МТВФ системы 1 и системы 2**

	Месяц 1		Месяц 2		Месяц 1 и 2	
Система 1		МТВФ 25		МТВФ 46		
Система 2		МТВФ 30		МТВФ 50		

Основываясь на данных табл. 2, можно решить, что больше ресурсов необходимо вкладывать в систему 1, так как меньшее время между отказами означает меньшую надежность. Верно ли это решение? Прежде всего необходимо пояснить, как определялось время между отказами. Расчет среднего времени между отказами – МТВФ, представлен в [4]:

$$\Theta = \frac{\text{TotalTime}}{\# \text{Failures}}, \quad (1)$$

где TotalTime – общее время работы узла;

# Failures – число отказов за определенный период работы.

Для расчета МТВФ узнаем время работы системы и число отказов в каждой системе за каждый месяц. В этом примере система 1 в первый месяц проработала 150 часов и случилось 6 отказов, и средняя наработка на отказ составила

$$\text{MTBF} = 150 / 6 = 25.$$

Таким образом, эти данные были получены по каждому месяцу и каждой системе. Но как мы подошли к последним двум месяцам, мы сложили данные двух месяцев и выяснили, что обе системы проработали 840 часов, но число отказов оказалось разным. По системе 1 за два месяца случился 21 отказ, а в системе 2 – 24 отказа. Так мы получили МТВФ 40 в системе 1 и МТВФ – 35 в системе 2. Данные представлены в табл. 3.

**Таблица 3. Полученные данные по системам**

	Месяц 1		Месяц 2		Месяц 1 и 2	
Система 1	150/6	МТВФ 25	690/15	МТВФ 46	840/21	40
Система 2	540/18	МТВФ 30	300/6	МТВФ 50	840/24	35

Так мы видим, что за первый и второй месяц у системы 2 МТВФ больше и указывает на большую надежность, но, когда мы суммируем данные за два месяца, получается, что у системы 1 большее среднее время между отказами. Как же это влияет на распределение ресурсов? Мы выяснили то, что среднее время между отказами предполагает, что уровень отказов один и тот же, но, как видно из примера, система 1 и система 2 имеют разный уровень отказов каждый месяц. Среднее время между отказами возрастает, но в итоге получаем совсем другую величину МТВФ, когда суммируем данные за 2 месяца. Таким образом, когда необходимо определить, куда направить ресурсы нужно смотреть не только на данные одной метрики, так как это может повлиять на расчет себестоимости или расходы на техническое обслуживание отдельных частей оборудования, но и

ж) регулярное рассмотрение плана обслуживания и целей и документированный план действий для обращения к корректирующим действиям, где цели не достигнуты;

з) использование методов предупредительного обслуживания;

и) использование методов предиктивного обслуживания, когда применимо;

к) периодический ремонт.

## **2) Анализ измерительных систем.**

Оценке должны быть подвергнуты измерительные системы, включающие специальные средства и методы мониторинга и измерений, используемые для проверки характеристик, указанных в планах управления, на соответствие техническим условиям. Такая оценка должна проводиться до или во время значимого цикла производства (анализ измерительных систем – MSA).

## **3) Предварительное изучение возможностей процессов.**

Изучение возможностей процессов следует проводить по характеристикам, определенным в плане управления. Изучение позволяет получить оценку готовности процессов к производству (Процесс одобрения производства части (PPAP) и Статистическое управление процессами (SPC)) для детального предварительного изучения возможностей процесса.

## **4) Одобрение производства части.**

Цель PPAP – определить, правильно ли понимаются организацией все технические проектные данные и технические требования потребителя, и имеет ли процесс потенциальную возможность производить в данных условиях производства назначенные объемы продукции в соответствии с этими требованиями (Процесс одобрения производства части).

## **5) Испытания с целью валидации производства.**

Под этим понимаются технические испытания, которые подтверждают, что продукция, изготовленная в условиях подготовленного производства, соответствует техническим стандартам потребителя, включая требования к внешнему виду.

## **6) Оценка упаковки.**

Результаты всех пробных погрузочно-разгрузочных работ (когда требуется) и методы испытаний упаковки должны подтвердить защиту продукции от обычных повреждений при транспортировке и вредных факторов окружающей среды. Команда организации по планированию качества продукции проводит оценку эффективности способа упаковывания независимо от наличия требований потребителя к упаковке.

## **7) План управления для серийной продукции.**

План управления для серийной продукции – это документ, содержащий описание системы управления частями и процессами производства. План управления – «живой» документ, который следует обновлять при внесении изменений в методы управления, основанных на опыте, получаемом при производстве части. (Может потребоваться одобрение уполномоченного представителя потребителя). План управления для серийной продукции – это логическое развитие плана управления для установочной серии. Серийное производство дает организации возможность оценить результаты, проанализировать план управления и внести соответствующие изменения.

## **8) Акт готовности производства (подписание) и одобрение руководства.**

Команде организации по планированию качества продукции следует провести проверку производственного участка и координировать официальное подписание акта. Подписание акта готовности производства (качества продукции) означает для руководства, что соответствующие действия по APQP завершены. Подписание проводится до первой отгрузки продукции и включает рассмотрение следующего:

- карты потока процессов. Проверить их наличие и следовать им;
- планы управления. Проверить их наличие, доступность и следование им в любое время для всех производственных операций;
- инструкции по процессам. Проверить, что эти документы содержат все ключевые характеристики, установленные в плане управления, и что все рекомендации PFMEA были учтены. Необходимо сравнить инструкции по процессам, PFMEA и карту потока процесса с планом управления;
- устройства для мониторинга и измерений. Когда в плане управления требуются специальные приборы, приспособления, испытательное оборудование, необходимо проверить надлежащее их использование (Анализ измерительных систем (MSA));
- демонстрация требуемой производительности. С использованием процессов производства, оборудования и персонала.

До подписания акта готовности производства (по завершению подписания) должна быть запланирована проверка руководством с целью его информирования о состоянии дел по программе планирования качества продукции и получения подтверждения содействия в решении возникших Примером документа, требуемого для поддержки эффективного подписа-

ния планирования качества, является акт готовности производства (отчет с краткими выводами по планированию качества и одобрению).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воинова Е.Г.* APQP – перспективное планирование качества продукции и план управления / Е.Г. Воинова, А.В. Глазунов, Е.П. Кочетков, М.И. Розно // Ссылочное руководство. 2-е изд. Нижний Новгород: Изд-во ООСМЦ «Приоритет», 2010. С. 45.
2. IATF 16949:2016 Фундаментальные требования к системе менеджмента качества для производств автомобильной промышленности и организаций, производящих соответствующие сервисные части. Первое издание. 2016. С. 61.
3. ISO 9001:2015 Системы менеджмента качества. Требования. 2015. С. 33.
4. *Крицкий О.Л.* Теория вероятностей и математическая статистика для технических университетов / О.Л. Крицкий, А.А. Михальчук, А.Ю. Трифонов, М.Л. Шинкеев // I. Теория вероятностей: учебное пособие / Томский политехн. ун-т. Томск: Изд-во Томского политехн. ун-та, 2010. С. 212.

УДК 519.832:519.81: 330.4

**Е. В. Титова, В. В. Абрамов**

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина  
Россия, г. Рязань, e-mail: elenatitovamail@gmail.com, v.abramov@rsu.edu.ru

## **ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЯ ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ПОТОКА ОБЪЕМОВ СБЫТА ОДНОГО ПРОДУКТА**

*Предложена модель оценки объемов предложения одного продукта на одном целевом сегменте. Учитывается неопределенность предложения продукта конкурентами.*

**Ключевые слова:** модель, теория игр, принятие решений, объем предложения, поток продаж, конкуренция, оценка прибыли.

**E. V. Titova, V. V. Abramov**

S.A. Yesenin Ryazan State University  
Russia, Ryazan, e-mail: elenatitovamail@gmail.com, v.abramov@rsu.edu.ru

## **THE DECISION ABOUT THE OPTIMIZATION OF THE FLOW OF SALES OF ONE PRODUCT**

*A model is proposed for estimating the volume of supply of one product on a single target segment. It takes into account the uncertainty of the product offer competitors.*

**Keywords:** model, game theory, decision-making, offer volume, sales flow, competition, profit evaluation.

Неопределенность прогнозирования прибыли – типичная проблема принятия решения при оптимизации сбыта. Для преодоления этой проблемы на практике часто применяются статистические методы. Недостаток такого подхода состоит в отсутствии модели, которая раскрывает механизм взаимосвязи факторов сбыта. При этом процесс принятия решения не является вполне транспарентным. Поэтому целесообразно предложить процедуру, с помощью которой лицо, принимающее решения, получает возможность реализовывать свои предпочтения в плане учета неопределенности путем экспертной настройки критерия оптимальности в рамках естественной математической модели.

Рассмотрим формально сбыт продукции одного типа предприятием в течение нескольких типичных периодов будущего времени. Допустим, неопределенность прогноза прибыли возникает из-за неопределенного объема конкурентного предложения. Тогда для адекватного учета возникающего при этом чистого риска в процессе принятия решения можно применить позицию крайней осторожности. Поэтому для оптимизации прибыли целесообразно использовать игровую модель, в которой решение определяется равновесием по Нейману. Однако за счет применения игровой модели значимость чистого риска может быть преувеличена, а прогнозируемая прибыль занижена. Поэтому при наличии у предприятия частичной информации о конкурентном предложении целесообразно иметь возможность корректировки результатов игрового моделирования с учетом имеющегося у лица, принимающего решение, уровня оптимизма. С этой целью может быть использован аналог критерия Ходжа–Лемана, позволяющий реализовать компромисс между позициями крайнего пессимизма и сдержанного оптимизма.

В качестве формальной модели для оптимизации прибыли от реализации потока объемов предложений в условиях неопределенности целесообразно использовать результаты работ [1–3], где использовались антагонистические игровые модели с квадратичными функциями выигрыша. Вопросы, связанные с вычислением решений игр такого типа, рассматривались в работах [4–6].

Рассмотрим ситуацию, в которой предприятие, реализующее один продукт на одном потребительском сегменте, принимает решение об оценке объемов предложения на несколько торговых периодов. Будем предполагать, что в течение любого торгового периода на целевом сегменте существует неудовлетворенный спрос на продукт. Кроме предприятия продукт предлагают конкуренты, причем об объеме их совокупного предложения имеется лишь приблизительная информация. Цена, по которой реализуется товар, зависит от величины неудовлетворенного спроса, то есть за счет неопределенности конкурентного предложения существует неопределенность при прогнозе цены реализации продукта. Рас-



ходы предприятия связаны не только с производством и сбытом продукта, но и с расходами на борьбу с конкуренцией, которые зависят лишь от объема конкурентного предложения. Будем предполагать, что эти расходы соответствуют ограниченности возможностей предприятия, то есть растут при относительно небольшом предложении конкурентов, но при значительном конкурентном предложении убывают.

Согласно сделанным предположениям, для оценки прибыли предприятия за несколько торговых периодов будем использовать следующую функцию:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n \left( a_i(V - y_i - x_i)x_i - (b_i x_i + (dy_i - ey_i^2)) \right), \quad (1)$$

где  $n$  – глубина прогноза (количество торговых периодов, учитываемых в перспективе);

$i$  – номер учитываемого торгового периода;

$f_i(x_i, y_i)$  – прибыль предприятия;

$x_i \geq 0$  и  $y_i \geq 0$  – объемы сбыта продукта предприятием и конкурентами;

$x = \text{colon}(x_1, \dots, x_n)$  и  $y = \text{colon}(y_1, \dots, y_n)$  – потоки объемов сбыта предприятия и конкурентов;

$V$  – потенциально возможный спрос на целевом сегменте;

$V - y_i - x_i$  и  $a_i(V - y_i - x_i)$  – неудовлетворенный спрос и цена продукта ( $a_i$  – цена единицы неудовлетворенного спроса;  $a_i V$  – потенциально возможная цена;  $a_i(y_i + x_i)$  – снижение цены за счет предложения продукта);

$b_i x_i$  – затраты предприятия на производство и сбыт своей продукции,

$b_i$  – прогнозируемые затраты предприятия на единичный объем предложения (норма затрат предприятия);

$dy_i - ey_i^2$  – расходы предприятия на преодоление конкуренции,  $d > 0$  и  $e > 0$  – параметры, определяющие политику преодоления конкуренции вне зависимости от номера торгового периода.

Рассмотрим функцию (1) в качестве функции выигрыша для антагонистической игры, в которой:

– предприятие – игрок 1, цель которого – наибольшая гарантированная прибыль, чистые стратегии – векторы  $x$ ,

– совокупность конкурентов предприятия на целевом сегменте, действующие как одно предприятие, – игрок 2, цель которого – минимизация прибыли игрока 1, чистые стратегии – векторы  $y$ .

Для практической применимости игровой модели в качестве основы для осторожной позиции принятия решения требуется разрешимость игры

по Нейману. Функция (1) непрерывно дифференцируема в  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ , ее матрицы Гессе, вычисленные по переменным  $x$  и  $y$  отдельно, являются знакоопределенными: 1)  $f''_{xx} = -2aE < 0$ , 2)  $f''_{yy} = 2eE > 0$ , где  $E$  – единичная  $n \times n$ -матрица. (Здесь неравенство для матрицы совпадает со знаком квадратичной формы, которую определяет эта матрицей. Знак квадратичной формы определяется по критерию Сильвестра.) Следовательно, функция  $f(x, y)$  является строго вогнуто-выпуклой по паре переменных  $(x, y)$ . Итак, на любом выпуклом замкнутом ограниченном множестве из пространства  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$  игра имеет единственное решение, а пара оптимальных стратегий игроков соответствует единственной седловой точке функции (1).

Если не учитывать ограничения на чистые стратегии, то седловая точка функции выигрыша – это точка пересечения графиков функций наилучшего ответа  $x = x(y) = \arg \max_{x \in \mathbf{R}^n} f(x, y)$  (для игрока 1) и  $y = y(x) = \arg \min_{y \in \mathbf{R}^n} f(x, y)$  (для игрока 2) определяются из необходимых условий экстремума:

$$\begin{cases} f'_{x_i} = -2a_i x_i - a_i y_i + (a_i V - b_i) = 0, \\ f'_{y_i} = -a_i x_i + 2e y_i - d = 0, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Заметим, что исключение ограничений – это подходящий способ моделирования ситуации принятия решения, в которой у предприятия отсутствует информация о действиях конкурентов. С другой стороны, по экономическим соображениям оптимальные чистые стратегии – потоки продаж – должны быть векторами с положительными элементами (это соответствует участию обеих сторон в сбыте). Если оптимальная цена игры положительна, то такую ситуацию для предприятия можно расценивать как продуктивную. Иначе с позиции крайней осторожности возможный совокупный доход не больше величины затрат.

В рассматриваемой задаче объективно определенными следует считать величины  $a_i, V, b_i, i = \overline{1, n}$ , а параметры  $d, e$  могут варьироваться, так как зависят от способа принятия решения предприятием. Кроме того, на практике для предприятия в каждом торговом периоде №  $i$  могут существовать ограничения на максимальное или минимальное значения объема предложения  $x_i$ . Возможна также ситуация, когда нереализованный объем продукта предлагается предприятием в следующем торговом периоде. Поэтому далее при решении игры целесообразно проанализировать способ подбора параметров, позволяющий согласовать

формальные результаты с естественным экономическим смыслом продуктивности и с рекомендациями по организации производства продукта предприятием. С этой точки зрения будем рассматривать возникающие далее условия для коэффициентов функции (1).

Система (2) – это совокупность линейных систем для объемов сбыта предприятия и его конкурентов на каждом торговом периоде. Решение  $(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $\bar{x} = \text{colon}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ ,  $\bar{y} = \text{colon}(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$  системы (2) имеет вид

$$\bar{x}_i = \frac{2e(a_i V - b_i) - da_i}{a_i(a_i + 4e)}, \quad \bar{y}_i = \frac{a_i \bar{x}_i + d}{2e}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Равенства (3) определяют седловую точку функции выигрыша (1) без учета ограничений на чистые стратегии игроков.

Теперь учтем следующие естественные ограничения:

$$\bar{x}_i > 0, \quad \bar{y}_i > 0, \quad d\bar{y}_i - e\bar{y}_i^2 > 0. \quad (4)$$

В силу условий (3), (4) потребуем выполнения оценок

$$0 < 2e(a_i V - b_i) - da_i < \frac{d}{2e}(a_i + 4e), \quad (5)$$

которые позволяют подобрать параметры  $d$ ,  $e$  для функции (1). Кроме того, прибыль  $f(\bar{x}, \bar{y})$  предприятия в точке (3) является функцией от  $d$ ,  $e$ . (В частности,  $f(\bar{x}, \bar{y})$  – квадратичная функция от  $d$ .) Значит, рекомендуемые значения этих параметров, определяющих затраты предприятия на преодоление конкуренции, можно дополнительно подчинить оптимизационному принципу  $f(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow \max$ .

Для моделирования сдержанного оптимизма при расчете потока объемов сбыта предположим, что с вероятностью  $R_i$  предприятие принимает условие, что известна функция  $p_i(y_i)$  – плотность распределения вероятностей объема конкурентного предложения продукта в торговом периоде  $i$ . При этом параметр  $R_i$  выбирается как экспертная оценка и рассматривается в качестве допустимого риска или показателя оптимизма лица, принимающего решения. Функцию  $p_i(y_i)$  целесообразно выбрать по экстремальному принципу информационной энтропии с учетом рассматриваемых ограничений на объем  $y_i \in Y_i$ . (Ограничение также рассматривается как вариант информированности предприятия о действиях конкурентов.) Соблюдение этого принципа служит компромиссом между

информированностью, порождающей оптимизм, и принятием условия полной неопределенности, приводящей к позиции крайней осторожности. Поэтому такой подход может служить моделью сдержанного оптимизма.

С учетом выбранного распределения можно вычислить среднюю прибыль предприятия  $F_i(x_i) = \int_{Y_i} f_i(x_i, y_i) p_i(y_i) dy_i$  в торговом периоде  $i$ .

Так как

$$\frac{\partial^2 F_i(x_i)}{\partial x^2} = \int_{Y_i} \frac{\partial^2 f_i(x_i, y_i)}{\partial x^2} p_i(y_i) dy_i = \int_{Y_i} (-2a_i) p_i(y_i) dy_i = -2a_i < 0,$$

то функция  $F_i(x_i)$  имеет единственный глобальный максимум в некоторой точке  $\bar{x}_i$ . Поэтому за торговый период  $i$  с позиции сдержанного оптимизма при наличии информации и из экономических соображений выбираем следующие оценки:

$$x_{li} = \begin{cases} \bar{x}_i, & \bar{x}_i > 0 \ \& \ F_i(\bar{x}_i) > 0, \\ 0, & \bar{x}_i \leq 0 \ \vee \ F_i(\bar{x}_i) \leq 0 \end{cases} \quad \text{– рекомендуемый объем сбыта про-}$$

дукта для предприятия;

$$f_{li} = \begin{cases} F_i(\bar{x}_i), & \bar{x}_i > 0 \ \& \ F_i(\bar{x}_i) > 0, \\ 0, & \bar{x}_i \leq 0 \ \vee \ F_i(\bar{x}_i) \leq 0 \end{cases} \quad \text{– оптимистичная оценка прибыли}$$

предприятия.

Допустим, имеются оценки

$$y_i \in Y_i = \left[ y_i^{\min}, y_i^{\max} \right] \subset [0, d/e], \quad i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Тогда наибольшей информационной энтропией на отрезке обладает равномерное распределение, для которого

$$p_i(y_i) = \begin{cases} \frac{1}{y_i^{\max} - y_i^{\min}}, & y_i \in \left[ y_i^{\min}, y_i^{\max} \right], \\ 0, & y_i \notin \left[ y_i^{\min}, y_i^{\max} \right]. \end{cases} \quad (7)$$

При этом средняя прибыль предприятия

$$F_i(x_i) = -a_i x_i^2 + \left( a_i \left( V - \frac{1}{2} (y_i^{\max} + y_i^{\min}) \right) - b_i \right) x_i + \\ + \left( \frac{e}{3} \left( (y_i^{\max})^2 + (y_i^{\min})^2 + y_i^{\max} y_i^{\min} \right) - \frac{d}{2} (y_i^{\max} + y_i^{\min}) \right)$$

достигает максимума  $F_i(\bar{x}_i)$  в точке  $\bar{x}_i = \frac{1}{2} \left( V - \frac{1}{2} (y_i^{\max} + y_i^{\min}) - \frac{b_i}{a_i} \right)$ .

Итак, при условиях (5)–(7) для принятия решения предприятием в каждом торговом периоде  $i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , с позиции сдержанного оптимизма вследствие частичной информированности о конкурентном предложении и выбранного допустимого риска рекомендуются следующие оценки:

$x_i^* = (1 - R_i)\bar{x}_i + R_i x_{1i}$  – объем сбыта продукта для предприятия,

$f_i^* = F_i(x_i^*)$  – прибыль предприятия.

Тогда  $x^* = \text{colon}(x_1^*, \dots, x_n^*)$  – рекомендуемый поток продаж продукта для предприятия, а  $f^* = \sum_{i=1}^n f_i^*$  – оценка суммарной прибыли.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Титова Е.В.* Игровая модель оценки объема сбыта одного продукта / Е.В. Титова, В.В. Абрамов // Современные технологии в науке и образовании. СТНО-2018: сб. тр. междунар. науч.-техн. форума. В 10 т. Т. 7 / под общ. ред. О.В. Миловзорова. Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2018. С. 5–8.
2. *Титова Е.В.* Модель оценки объема предложения / Е.В.Титова, В.В. Абрамов // Математика и естественные науки. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Вып. 12. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2017. С. 271–276.
3. *Титова Е.В.* Игровая модель принятия решения об оптимизации потока объемов сбыта одного продукта / Е.В.Титова, В.В. Абрамов // Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук: сб. науч. ст. IV науч.-практ. междунар. конф. (школы-семинара) молодых ученых: 23-25 апреля 2018 г. Ч. 1. Тольятти: Издатель Качалин А.В., 2018. С. 527–531.
4. Теория игр. Учебно-методическое пособие // В.В. Абрамов, С.С. Мамонов, Н.А. Мишакова, У.Н. Эфендиев. Рязань: РГУ им. С.А. Есенина, 2016. 88 с.
5. *Ананьина С.А.* Коэффициентные условия существования седловой точки квадратичной функции на единичном квадрате / С.А.Ананьина, В.В. Абрамов // Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук: сб. науч. ст. IV науч.-практ. междунар. конф. (школы-семинара) молодых ученых: 23-25 апреля 2018 г. Ч. 1. Тольятти: Издатель Качалин А.В., 2018. С. 164–168.
6. *Ананьина С.А.* Условия разрешимости антагонистической игры на единичном квадрате / С.А. Ананьина, В.В. Абрамов // Математика и естественные науки. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Вып. 13. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ. 2018. С. 110–115.

**О. К. Украженко, К. А. Украженко**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: [ukrazhenko.oleg@yandex.ru](mailto:ukrazhenko.oleg@yandex.ru)

## **РАСЧЕТ ИНСТРУМЕНТА ДЛЯ ОБРАБОТКИ СЛОЖНОПРОФИЛЬНЫХ ВНУТРЕННИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА МНОГОЦЕЛЕВЫХ СТАНКАХ МЕТОДОМ ПРОТЯГИВАНИЯ**

*В упрощенном виде рассмотрена инженерная методика автоматизированного расчета инструмента прошивка для обработки сложнопровильных внутренних поверхностей в деталях на многоцелевых станках на основе математического моделирования и экспериментальных исследований процесса протягивания. Приведены примеры расчета прошивок и усилий калибрования точных отверстий.*

**Ключевые слова:** инструмент прошивка, протяжка, сила резания, подача, снимаемый припуск, профильные отверстия, многоцелевой станок.

**О. К. Ukrazhenko, К. А. Ukrazhenko**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: [ukrazhenko.oleg@yandex.ru](mailto:ukrazhenko.oleg@yandex.ru)

## **CALCULATION TOOL FOR PROCESSING COMPLEX-HOLES IN MULTI-TASK MACHINES METHOD OF BROACHING**

*In a simplified form, the technique of automated calculation of firmware for processing complex internal surfaces in parts on multi-purpose machines based on mathematical modeling and experimental studies of the stretching process is considered. Examples of the calculation of firmware and calibration efforts of the fine holes.*

**Keywords:** tool firmware, broaching, power cutting, filing, remove the stock, profile holes, machining.

Технологические операции прошивания отверстий впервые предлагается производить на многоцелевых станках. Это стало возможным при создании оригинального универсального протяжного инструментального модуля, не требующего дополнительного привода, а использующего привод главного движения или револьверной головки токарного центра, и включающего механизм устранения силового влияния процесса обработки на шпиндельные опоры станка.

Данное инновационное техническое предложение позволяет значительно повысить производительность и точность, а также производить обработку деталей, имеющих профильные отверстия, не прерывая технологический цикл, что дополнительно повышает эффективность обработки.

Важнейшим параметром при протягивании (прошивании) является сила резания, необходимая для выполнения данной операции. При расчете силы протягивания используют экспериментальные исследования по обработке различных материалов. На основании силы резания  $P_z$  рассчитываются напряжения в режущем инструменте и привод инструментального модуля.

При расчете используется сила резания  $Q$  на 1 мм длины режущей кромки для разных величин  $S_z$  подач на зуб [1]. В результате чего, зная величину  $\sum l_z$  (в мм) – сумму длины режущих кромок всех одновременно работающих зубьев  $z_p$  протяжки, можно определить максимальную силу  $P_{max}$  протягивания согласно алгоритму, представленному на рис. 1.

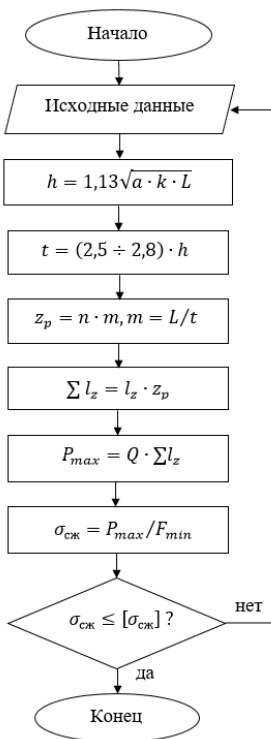


Рис. 1. Алгоритм расчета инструмента

Расчет инструмента прошивки с изменяемой длиной режущей кромки рассмотрим на конкретном примере обработки профильного отверстия с 8-зубчатым треугольным профилем (рис. 2) в детали диск, служебное назначение которого – передача крутящего момента с возможностью осевого перемещения.

Исходные данные для расчета:

- обрабатываемый материал – сталь 45;
- режущий материал – быстрорежущая сталь P9;
- допустимое напряжение на сжатие:  $[\sigma_{сж}] = 200$  МПа;
- диаметр отверстия,  $d = 20$  мм;
- длина обработки,  $L = 15$  мм.

Расчетные исходные данные:

- общий снимаемый припуск  $A$ , мм;
- толщина среза  $a$  или подача на зуб  $S_z$ , мм:  $a = S_z$ ;
- коэффициент заполнения канавки равен  $k$ :  $k = f_k / f_{ср}$ , рис. 3;

$f_k$  – площадь активной части канавки, мм<sup>2</sup>:  $f_k = \pi h^2 / 4$ ;

$f_{ср}$  – площадь продольного сечения среза, мм<sup>2</sup>:  $f_{ср} = aL$ ;

для расчетов коэффициент  $k$  можно принять  $k = 2$ ;

- число групп зубьев, участвующих в работе одновременно,  $m$ ;
- число зубьев в группе  $n$ ;
- номер группы зубьев или номер зуба в группе,  $z$ ;
- геометрические параметры зуба, рис. 4:

задний угол,  $\alpha = 4^\circ$ ; передний угол,  $\gamma = 10^\circ$ ;  $\eta = 45^\circ - 50^\circ$ ;

$\omega = 30^\circ - 35^\circ$ ;  $h = (0,35 \div 0,4)t$ ;  $g = (0,3 \div 0,4)t$ ;  $r = (0,2 \div 0,25)t$ .

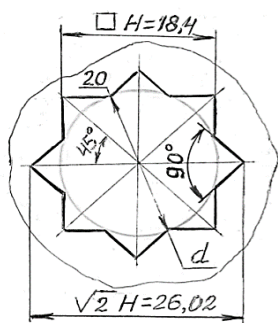


Рис. 2. Эскиз профиля обрабатываемого отверстия

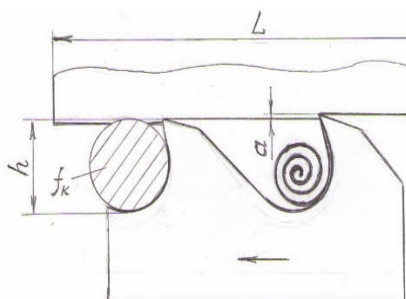
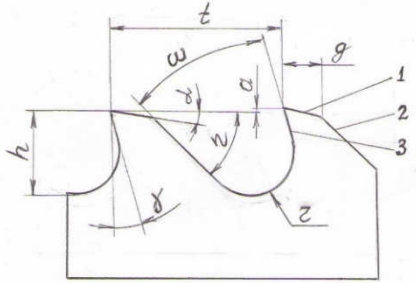


Рис. 3. Схема заполнения канавок для стружки





**Рис. 4. Форма зубьев и параметры инструмента:**

- 1 – задняя поверхность; 2 – спинка зуба;  
3 – передняя поверхность

Общий снимаемый припуск  $A$  определяется исходя из контура профиля обрабатываемой поверхности (рис. 5, а) и рассчитывается по формуле

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot H - \frac{d}{2} = 3,01 \text{ мм},$$

где  $H$  – размер (см. рис. 2), определяемый из условия, что зубчатые профили, состоящие из равнобедренных треугольников и выполненные в отверстии диаметром  $d$ , соединены вплотную друг с другом основаниями, которые опираются на дуги –  $\pi d/8 = 7,85$  мм.

Отсюда:  $H = d \cdot \cos 22^\circ 30' = 18,4$  мм.

Рассчитанный общий припуск  $A$  разделен на определенные толщины среза  $a$ , равные подаче на зуб  $S_z$  проектируемой прошивки.

$$A = S_{z_1} + S_{z_2} + \dots + S_{z_{19}} + S_{z_{20}} = \sum_{z=1}^{20} S_z, \quad S_{z_1} > S_{z_2} > S_{z_3} \dots$$

В связи с тем, что обрабатываемый профиль состоит из равнобедренных треугольников, подачи  $S_z$ , начиная от основания треугольного профиля до его вершины, возрастают, т.к. длина  $l_z$  среза сокращается. Подача  $S_z$  для каждой группы зубьев рассчитывалась по определенной программе, основанной на теории прочности, таким образом, чтобы каждый зуб  $z$  прошивки испытывал примерно равные нагрузки (напряжения) в процессе обработки.

На основании исходных данных и согласно алгоритму (см. рис.1):

1) определяем шаг  $t$  и высоту  $h$  зубьев; для рассчитанных подач  $S_z = a$  при коэффициенте заполнения  $k = 2$ ;

2) выбираем усредненные (т.к. длина  $L$  обработки небольшая) значения параметров шага  $t = 6$  мм и высоты  $h = 2,7$  мм;

3) определяем число одновременно работающих групп  $m$  зубьев  $z$ ,  $m = L/t = 15/6 = 2,5$ . Это означает, что в работе одновременно участвуют 2 группы зубьев прошивки, т.е.  $m = 2$ .

Длины  $l_z$  резания каждым зубом  $z$  (группы зубьев) определялись из выражения:

$$l_z = l_{z-1} - x_{z-1} - x_z, \quad (1)$$

$$l_1 = l - x - x_1;$$

$$l_2 = l_1 - x_1 - x_2;$$

.....

$$l_{19} = l_{18} - x_{18} - x_{19}.$$

где  $l = \pi d/8$ ;  $x_z = S_z/\operatorname{tg} \beta$ ;  $x_z$  – расстояние ( $z = 1; 2 \dots 19$ ), (рис. 5, б).

Рассчитанные значения длин  $l_z$  режущих кромок прошивки и силы резания  $P_z$  для каждого отдельного зуба  $z$  представлены в табл. 1 и определены по формуле  $P_z = Q \cdot l_z$ ,

**Таблица 1. Параметры для расчета сил резания**

$z$	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$S_z, \text{мм}$	2	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13	0,14
$x_z, \text{мм}$	3	0,078	0,09	0,10	0,12	0,13	0,14	0,156	0,169	0,18
$l_z, \text{мм}$	4	7,77	7,6	7,4	7,2	6,9	6,7	6,4	6,0	5,7
$Q, \text{даН}$	5	15,3	17,4	19,5	21,6	23,6	25,8	27,7	29,8	32
$P_z, \text{даН}$	6	118,9	132	144	156	163	172	177	179	182

**Продолжение таблицы 1**

1	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	0,15	0,16	0,17	0,19	0,21	0,23	0,25	0,27	0,29	0,19
3	0,195	0,2	0,22	0,25	0,27	0,3	0,325	0,35	0,38	0,25
4	5,3	4,9	4,5	4,0	3,5	2,9	2,3	1,6	0,85	0,22
5	33,8	36	38	41,9	46,2	50,4	54	58	62,4	41,9
6	179	176	171	167	161	146	124	93	53	9

Расчет максимальных сил резания  $P_{\max}$  (даН) произведен по двум группам режущих зубьев, одновременно участвующих в обработке по формуле (2):

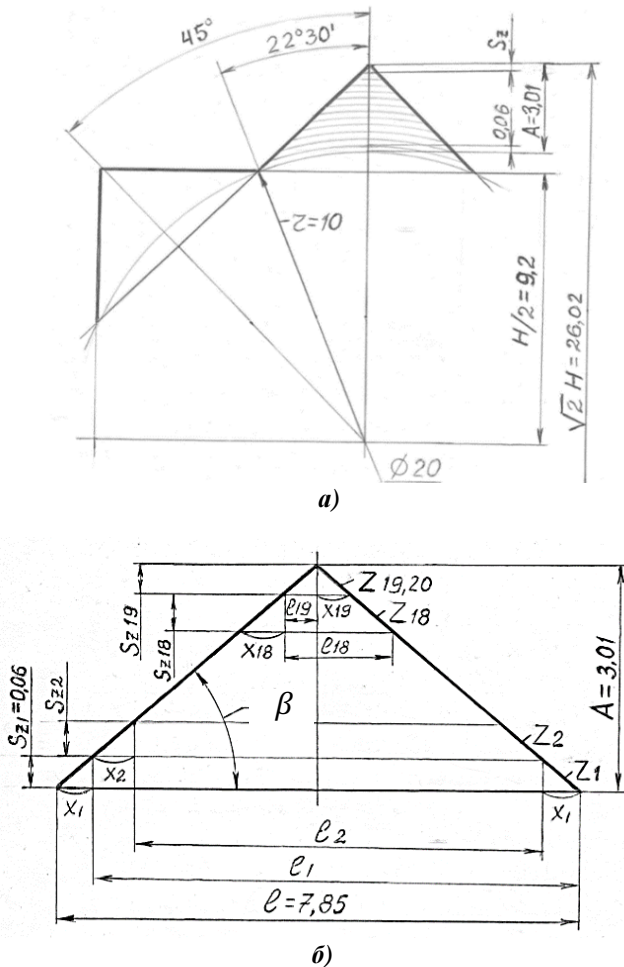
$$P_{\max} = n \cdot (P_z + P_{z+1}). \quad (2)$$

Проверочный расчет проектируемой прошивки в сечении с минимальной площадью  $F_{\min}$  по максимальным напряжениям сжатия  $\sigma_{\text{сж}}$  проводим по формуле

$$\sigma_{\text{сж}} = \frac{P_{\max}}{F_{\min}} = 163 \text{ МПа} < [\sigma_{\text{сж}}].$$

Согласно представленной методике можно производить автоматизированный расчет прошивок для обработки разных профильных отверстий.

На предлагаемом инструментальном модуле можно производить операции калибрования отверстий инструментом дорном [2], который постепенно перемещается относительно обрабатываемой поверхности.



**Рис. 5. Геометрические модели для расчета:**  
 а – припуска  $A$  для обработки зубчатого профиля;  
 б – длин  $l_z$  режущих кромок зубьев прошивки

Основным параметром процесса является натяг  $\delta$ :  $\delta = d_{\text{ин}} - d$ , где  $d_{\text{ин}}$  – диаметр инструмента;  $d$  – диаметр обрабатываемого отверстия.

Усилие калибрования  $P_k$  для толстостенных деталей определяется экспериментально. Предварительно определить (оценить) данное усилие можно из выражения зависимости осевой силы  $P$  (даН), с которой удерживается инструмент в отверстии детали, от давления  $\sigma$  в сопряжении инструмент-деталь, создающего данную силу,

$$P = \sigma \cdot \pi \cdot d \cdot l \cdot f, \quad (3)$$

и выражения для зависимости давления  $\sigma$  (МПа) от натяга  $\delta$ , основанного на решении задачи Ляме из теории упругости [3, 4],

$$\sigma = \frac{\delta}{d \cdot \left( \frac{C_1 + C_2}{E_1 + E_2} \right)}. \quad (4)$$

Используя (3) и (4), можно определить усилие  $P$  (даН) согласно формулы

$$P = \frac{10^{-3} \cdot \delta \cdot E \cdot \pi \cdot d \cdot l \cdot f}{d_y}, \quad (5)$$

где  $\delta$  – натяг или деформация в сопряжении, мкм;

$d_y$  – условный диаметр обрабатываемой детали,  $d_y = d / (1 - d^2 / D^2)$ , мм;

$E$  – модуль упругости, для стали  $E = 2,1 \cdot 10^5$  Мпа;

$d$  – диаметр отверстия в детали, мм;

$l$  – длина рабочей части инструмента, мм;

$f$  – коэффициент трения скольжения;

$D$  – наружный диаметр детали, мм.

Для осуществления процесса калибрования сила  $P_k$  должна быть больше, чем сила  $P$ ; т.е. при  $P_k > P$  должно соблюдаться условие перемещения инструмента.

Данные математические зависимости позволяют на этапе проектирования сделать необходимый расчет и оценить силовые возможности привода станка.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Родин П.П.* Проектирование и производство режущего инструмента. М.: Машиностроение, 1962. 250 с.
2. Справочник технолога машиностроителя. Т. 1 / под ред. А.Г. Косиловой, Р.К. Мещерякова. М.: Машиностроение, 1972. 694 с.
3. *Украженко К.А.* Повышение эффективности обработки на многоцелевых станках. Ярославль: Яросл. гос. техн. ун-т, 2008. 339 с.
4. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1970. 544 с.

**Д. В. Фурманов, Н. Н. Ключко, В. С. Чижов**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: denis\_furmanov@mail.ru

## **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ОЦЕНКА РАЦИОНАЛЬНЫХ УГЛОВ ЗАОСТРЕНИЯ ЗУБЬЕВ МАШИН ДЛЯ РАЗРАБОТКИ ПРОЧНЫХ ДОРОЖНО-СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

*В статье рассматривается модель контактного взаимодействия штампов конической и цилиндрической формы с прочным дорожно-строительным материалом. Отмечается высокая корреляция между относительными деформациями и контактными напряжениями. Представлены особенности взаимодействия с материалом конических штампов с различными углами заострения.*

**Ключевые слова:** статическая пенетрация, показатель контактной прочности, контактные напряжения, относительная деформация, ядро уплотнения, угол внутреннего трения.

**D. V. Furmanov, N. N. Klochko, V. S. Chizhov**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: denis\_furmanov@mail.ru

## **EXPERIMENTAL ASSESSMENT OF RATIONAL ANGLES OF SHARPENING OF THE TEETH OF THE MACHINERY FOR THE DEVELOPMENT OF DURABLE ROAD CONSTRUCTION MATERIALS**

*The paper presents theoretical representations of the process of interaction of cutting elements of construction and road machines with the material, presents the methodology and results of penetration surveys of the interaction of conical dies with cement concrete and bituminous concrete. The estimation of efficiency of teeth of machines with different angles of sharpening is predicted.*

**Keywords:** bituminous concrete, cement concrete, static penetration, conical die, sharpening angle.

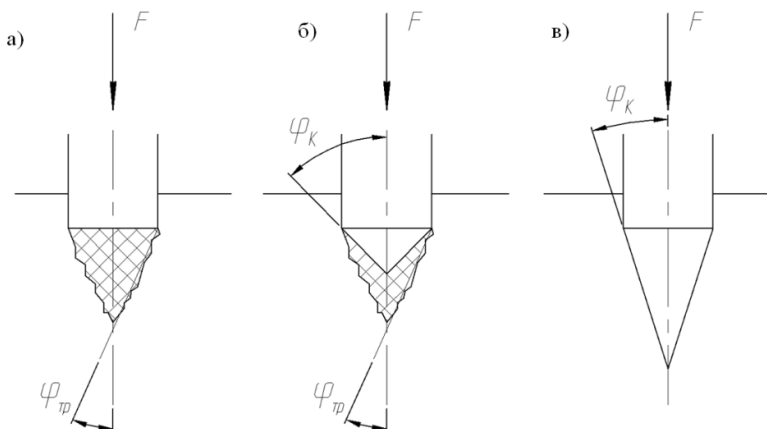
Утилизация и переработка дорожно-строительных материалов является энергоемкой операцией. Неправильно спроектированные рабочие органы машин и оборудования для фрезерования асфальтобетона, дробления и утилизации железобетонных конструкций, вызывают высокие финансовые потери как в процессе изготовления, так и в процессе эксплуатации новых или уже существующих машин. Учитывая это обстоятельство, нельзя поверхностно относиться к конструкции зубьев фрезерных машин, мультипроцессоров, бетоноломов, сваерезов и т. д.

Угол заострения, как один из основных параметров режущих элементов машин, существенно влияет на силы сопротивления резанию. Механизм взаимодействия с материалом резцов различной конструкции и формы хорошо исследован проф. А.Н. Зелениным [1] при достаточно ёмком исследовании процессов разработки грунтов. Показателен эксперимент, проведенный им по вдавливанию цилиндрических штампов различной формы и размеров (рис. 1). При вдавливании плоского штампа в грунт на его лобовой поверхности возникает уплотненное ядро, форма которого близка к форме конуса, с углом между образующей и осью вращения  $\varphi_{mp}$  этого конуса (рис. 1, а). Величина данного угла обусловлена внутренним трением в материале. При вдавливании конического штампа с большим углом заострения конуса (угол между образующей конуса и осью вращения)  $\varphi_k$ , значение которого больше угла внутреннего трения в грунте  $\varphi_{mp}$ , образуется уплотненное ядро такой же формы, а значение силы сопротивления вдавливанию штампа  $F$  остается такой же, как и в случае использования плоского штампа.

Вдавливание конического штампа с углом конуса  $\varphi_k < \varphi_{mp}$  не вызывает образования уплотненного ядра. Заглубление штампа осуществляется с силами сопротивления вдавливанию, величина которых существенно ниже. Если в первых двух случаях сопротивление вдавливанию обусловлено внутренним трением материала поверхности ядра уплотнения, то в третьем случае трение осуществляется между материалом и стальной поверхностью конуса. Совершенно очевидно, что значение внутреннего трения выше, чем значение коэффициента трения между поверхностью штампа и материалом (обычно коэффициент трения «сталь – грунт»), что в свою очередь снижает силы вдавливания.

В отличие от грунта, прочные дорожно-строительные материалы имеют несколько иную картину разрушения. В процессе образования новых поверхностей активную роль оказывает хрупкое разрушение, а «течение» материала о ядро уплотнения или о поверхность рабочего органа практически не происходит. При внедрении зуба в материале образуется концентратор напряжений. Одновременно с этим, накапливаются внутренние напряжения в объеме материала. При достижении необходимой величины напряжений в концентраторе происходит хрупкое разрушение с образованием сколов, местных или магистральных трещин. Анализ разрушения прочных материалов возможен при глубоком изучении факторов, влияющих на склонность к хрупкому разрушению, основа которых приводится в ставших классическими работах Гриффитса, Орована, Ирвина [2-4].

Кроме того, многие прочные материалы, применяемые в строительстве, являются каркасными (железобетон) или дисперсно-наполненными (асфальтобетон) композитами [5, 6].



**Рис. 1. Схема взаимодействия конического штампа с грунтом при испытании методом статической пенетрации:**

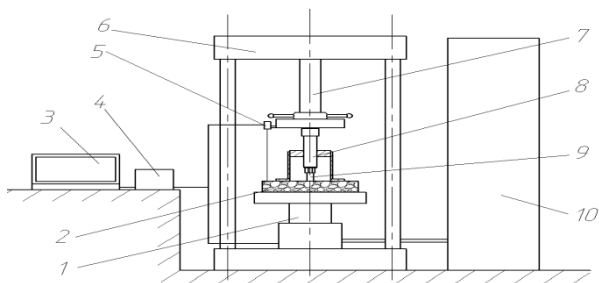
*а* – вдавливание плоского штампа; *б* – вдавливание конического штампа с углом заострения  $\varphi_{\text{к}} > \varphi_{\text{ш}}$ ; *в* – вдавливание конического штампа с углом заострения  $\varphi_{\text{к}} < \varphi_{\text{ш}}$

Для оценки характера взаимодействия конических штампов с прочными материалами на кафедре «Строительные и дорожные машины» ЯГТУ разработан лабораторный комплекс для определения показателей прочности материала (рис. 2), позволяющий производить необходимые пенетрационные исследования. Лабораторный комплекс представляет собой двухстоечный гидравлический пресс, с установленным на неподвижном столе лазерным датчиком перемещений. На подвижный стол устанавливалось приспособление для монтажа штампов различной формы и конструкции. Для определения силы сопротивления вдавливанию к гидроприводу силового гидроцилиндра подсоединялся датчик давления. Показания датчика перемещения и датчика давления записывались на компьютер при помощи модуля аналого-цифрового преобразователя.

Эксперимент проводился на двух видах материала – песчаный асфальтобетон марки Д3 при температуре 22 °С [7] и образцах цементобетона с прочностью на сжатие 31,4 МПа. Вдавливание штампов происходило до начала процесса растрескивания материала. В ходе эксперимента определялись контактные напряжения на штампах при различных углах заострения по формуле

$$\sigma_{\text{к}} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2}, \quad (1)$$

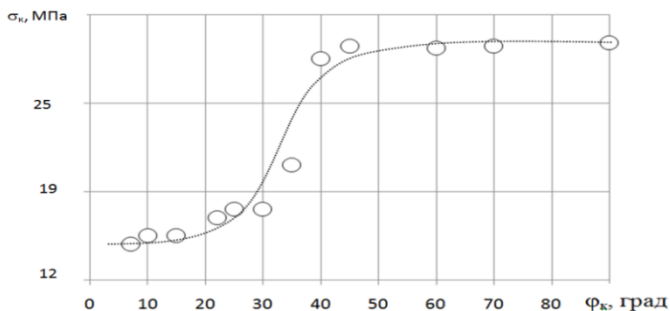
где  $F$  – сила сопротивления вдавливанию штампа, Н;  $d$  – диаметр контактной зоны штампа, мм.



**Рис. 2. Схема лабораторного комплекса для определения деформационно-прочностных свойств асфальтобетонов:**

1 – плунжерный гидроцилиндр; 2 – испытываемый материал; 3 – персональный компьютер; 4 – измерительная система с АЦП; 5 – лазерный датчик перемещений; 6 – станина пресса; 7 – регулировочный винт; 8 – приспособление для крепления штампов; 9 – сменный штамп; 10 – гидравлическая станция с системой управления

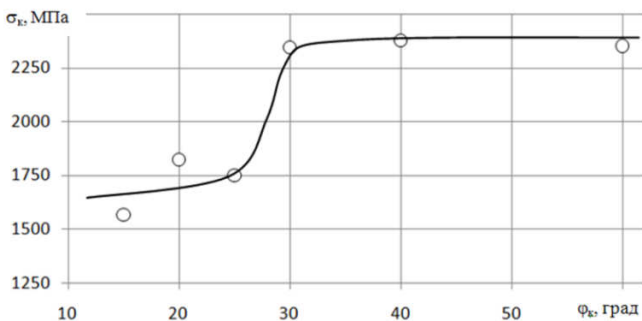
Полученные результаты, несмотря на гораздо более высокую прочность по сравнению с грунтами, показали схожие результаты на этапе формирования ядра уплотнения (рис. 3, 4). Так при углах заострения более 25...35 градусов наблюдался существенный рост контактных напряжений на поверхности штампа. Данный угол, для различных условий соответствует углу внутреннего трения в материале.



**Рис. 3. График зависимости контактных напряжений на поверхности конического штампа от угла заострения при испытании асфальтобетона марки ДЗ**

Схожесть графиков свидетельствует о том, что в процессе разрушения прочных материалов на предварительном этапе развития напряжений, прочные материалы ведут себя так же, как и грунт. Однако, учитывая высокие абразивные свойства прочных материалов, можно дать следующие рекомендации:





**Рис. 4. График зависимости контактных напряжений на поверхности конического штампа от угла заострения при испытании образцов цементобетона**

1. Угол заострения режущего инструмента (зубьев, долот) должен быть ниже угла внутреннего трения материала для тех задач проектирования, когда изнашивание зуба экономически обосновано (зубья долот, ковшей для мерзлых грунтов и т. д.).

2. Угол заострения режущего инструмента должен быть выше угла внутреннего трения для тех задач, когда изнашивание инструмента существенно и частая смена зубьев или резцов нецелесообразна или невозможна (дорожные фрезы, ресайклеры и т. д.).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зеленин А.Н. Машины для земляных работ : учеб. пособие для вузов / А.Н. Зеленин, В.И. Баловнев, И.П. Керов. М.: Машиностроение, 1975. 422 с.
2. Griffith A.A. The phenomenon of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1920. № 221. P. 163.
3. Griffith A.A. Theory of rupture // Proceedings of the 1-th intern. conf. on applied mechanics. 1924. P. 55.
4. Orowan E.O. Fundamental of brittle behavior of metals / W.M. Murray (ed) // Fatigue and fracture of metals. 1950. P. 139-167.
5. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
6. Баженов С.Л. Механика и технология композиционных материалов. Долгопрудный: Издат. дом «Интеллект», 2014. 328 с.
7. ГОСТ 9128-2009. Смеси асфальтобетонные, дорожные и аэродромные и асфальтобетон. Технические условия; введ. 2009-01-01. М.: Стандартинформ, 2010.

**В. Д. Боровков, Ю. В. Васильков**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: vd.borovkov@yandex.ru, myvas@gapm.ru

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ СИНТЕЗА СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЪЕКТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДОБРОТНОСТИ СИСТЕМЫ**

*Рассматривается задача расчета параметров типовых регуляторов для технологических процессов с несколькими входными и выходными параметрами. Предлагается метод, позволяющий уменьшить влияние каналов друг на друга, а также сократить воздействие случайных возмущений.*

**Ключевые слова:** многосвязный объект управления, ПИ-регулятор, добротность, случайные возмущения.

**V. D. Borovkov, U. V. Vasilkov**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: vd.borovkov@yandex.ru, myvas@gapm.ru

## **MODELING OF THE SYNTHESIS OF CONTROL SYSTEMS FOR MULTIVARIABLE OBJECTS BY USING THE Q-FACTOR OF THE SYSTEM**

*The paper considers the problem of calculating the parameters of typical regulators for technological processes with several input and output parameters. A method is proposed to reduce the influence of channels on each other, as well as to reduce the impact of random disturbances.*

**Keywords:** multidimensional control object, PI-controller, q-factor, random disturbances.

В настоящее время происходит усложнение технологических процессов. Поэтому при автоматизации всё чаще приходится сталкиваться с многосвязными объектами. А из-за того, что повышаются требования к качеству готовой продукции, повышается и требование к качеству регулирования, в том числе и к устойчивости системы к различного рода случайным воздействиям. При настройке регуляторов для многосвязных объектов с сильными перекрестными связями нельзя настраивать каждую подсистему в отдельности. Так как получившаяся система регулирования не будет обладать требуемым качеством, а также может получиться не устой-

чивой [1]. Сильные связи между подсистемами передают воздействия от одного канала объекта в другие, попутно увеличивая их воздействие. Таким образом, даже небольшие случайные воздействия в одной подсистеме могут привести к большим возмущениям в другой [2].

Оценить резонансные свойства многосвязной системы можно по ее амплитудно-частотным характеристикам. После настройки регулятора в системе, на амплитудно-частотной характеристике будет пик в области частоты регулирования, то есть все сигналы, приходящие в систему, с частотой, близкой к частоте резонанса, будут усиливаться. В связанной системе, если оба контура будут иметь резонанс на близких частотах, то получится резонанс и по перекрестным связям. Такое явление приводит к ухудшению качества регулирования, а также к возможной неустойчивости системы. Для уменьшения резонансных явлений в системе, необходимо, что бы области резонанса в подсистемах отстояли друг от друга по частоте как можно дальше. Для этого можно либо разнести частоты резонанса в подсистемах, либо сократить ширину резонансных пиков. Реализовать это можно за счет изменения настроек регуляторов. Однако, при разнесении резонансных частот в подсистемах, для достаточно широких резонансных пиков, можно выйти за границы устойчивости отдельных подсистем. Поэтому нельзя ограничиваться только перенесением частот резонанса, нужно обращать внимание на их ширину.

Параметром, определяющим резонансной свойства системы, является ее добротность. Это отношение частоты резонанса к ширине полосы усиливающих частот на амплитудно-частотной характеристике системы. Для расчетов добротности берется полоса частот, амплитудная характеристика для которых больше 0,707 от резонансного значения амплитудной характеристики [3]. Таким образом, максимизируя добротность системы по перекрестным каналам, мы уменьшаем ее резонансные свойства, и можем улучшить качество управления по некоторым каналам.

Для примера возьмем объект с двумя входами и двумя выходами с передаточными функциями апериодического звена второго порядка с запаздыванием по всем каналам. Схема объекта управления представлена на рис. 1.

Коэффициенты усиления для перекрестных связей возьмем меньше, чем по прямым каналам, но сопоставимым с ними, например

$$W(p) = \left[ \begin{array}{cc} \frac{10 \cdot e^{-2p}}{(50 \cdot p + 1) \cdot (40 \cdot p + 1)} & \frac{7 \cdot e^{-4p}}{(30 \cdot p + 1) \cdot (70 \cdot p + 1)} \\ \frac{6 \cdot e^{-3p}}{(10 \cdot p + 1) \cdot (40 \cdot p + 1)} & \frac{12 \cdot e^{-p}}{(30 \cdot p + 1) \cdot (10 \cdot p + 1)} \end{array} \right]$$

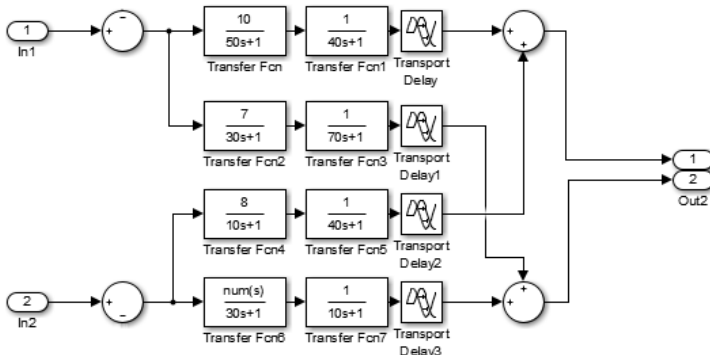


Рис. 1. Схема объекта управления

В качестве регуляторов возьмем типовой ПИ-регулятор. Схематичный вид системы регулирования представлен на рис. 2.

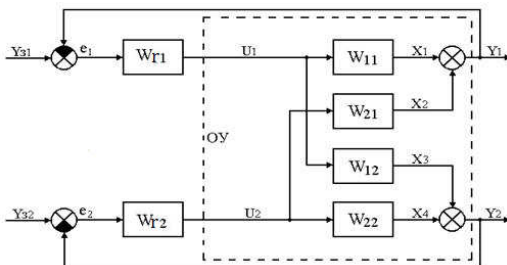


Рис. 2. Схема двухсвязной системы регулирования

Для определения добротности системы необходимо определить передаточные функции замкнутой системы по всем четырем каналам. Для двухсвязного объекта передаточные функции по каналам определяются следующим образом:

$$WS_{11}(p) = \frac{W_{11}(p) - Wz1(p)}{1 + Wp1(p) \cdot (W_{11}(p) - Wz1(p))},$$

$$WS_{22}(p) = \frac{W_{22}(p) - Wz2(p)}{1 + Wp2(p) \cdot (W_{22}(p) - Wz2(p))},$$

$$WS_{12}(p) = \frac{\frac{W_{12}(p)}{1 + Wp1(p) \cdot W_{11}(p)}}{1 + Wp2(p) \cdot (W_{22}(p) - Wz2(p))},$$

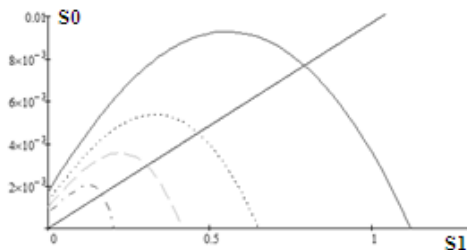
$$WS_{21}(p) = \frac{\frac{W_{21}(p)}{1 + Wp2(p) \cdot W_{22}(p)}}{1 + Wp1(p) \cdot (W_{11}(p) - Wz1(p))},$$

где

$$Wz1(p) = \frac{W_{12}(p) \cdot W_{21}(p) \cdot Wr2(p)}{1 + W_{22}(p) \cdot Wr2(p)},$$

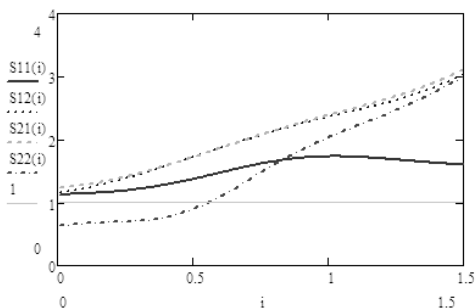
$$Wz2(p) = \frac{W_{12}(p) \cdot W_{21}(p) \cdot Wr1(p)}{1 + W_{11}(p) \cdot Wr1(p)}.$$

Теперь для первого регулятора определим настройки одним из типовых методов, а второй будем подстраивать под первый из условия минимума добротности. Для этого проведем луч из начала координат на плоскости настроек регулятора через точку настройки регулятора. Данная методика основывается на том, что оптимальные настроечные параметры системы при разной степени колебательности для метода расширенных частотных характеристик находятся практически на одной линии. Таким образом, двигаясь по ней, мы будем менять частоту и добротность системы, степень затухания переходного процесса, но при этом сохранять оптимальность настроечных параметров. Это проиллюстрировано на рис. 3.



**Рис. 3. Оптимальные настроечные параметры ПИ-регулятора для различных степеней затухания системы**

Зависимость добротности по каналам от положения точки на луче представлено на рис. 4.



**Рис. 4. График зависимости добротности системы по перекрестным каналам от настроек второго регулятора**

На рисунке принято следующее обозначение  $i$  – коэффициент, определяющий положение настроечных параметров на луче. При выборе настроек надо учитывать, что чем меньше  $i$ , тем меньше влияние регулятора на объект, и хуже качество регулирования [3].

Для выбора оптимального значения критерия для настроек возьмем несколько точек с разными значениями настроечных параметров и построим переходные процессы, подав возмущение в первую подсистему. При  $i = 0,8$  получаются значения параметров второго регулятора при независимой настройке. При  $i = 1,5$  происходит пересечение графиков добротности по каналам  $W_{22}(p)$  и  $W_{12}(p)$ . При  $i = 1,025$  достигается максимум добротности по каналу  $W_{11}(p)$ . При  $i = 0,56$  значение добротности по второму регулирующему каналу становится меньше 1. А также возьмем  $i=0,4$ , чтобы проверить теорию о том, что чем меньше добротность, тем лучше. Настроечные параметры второго регулятора в зависимости от значения  $i$  представлены в табл. 1. Настройки первого регулятора находятся без учета перекрестных связей и равны  $S_0 = 0.00789$ ,  $S_1 = 0.774$ .

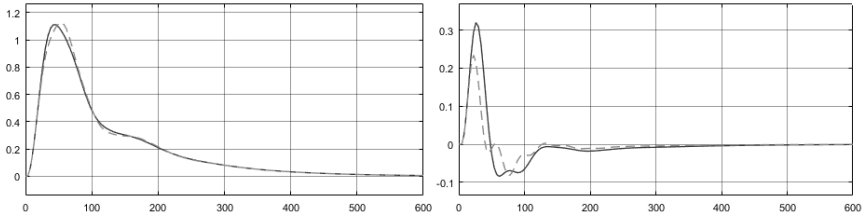
**Таблица 1. Зависимость настроечных параметров второго регулятора от значения  $i$**

№	$i$	$S_0$	$S_1$
1	0.4	0.013	0.44
2	0.56	0.07	0.557
3	1.025	0.027	0.898
4	1.5	0.037	1.246

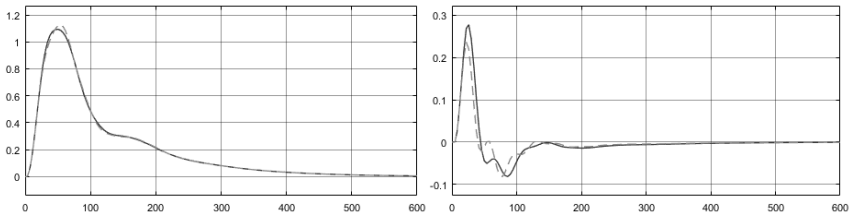
Сравнивать переходные процессы для полученных настроечных параметров будем с переходными процессами при независимой настройке регулятора. Настройки независимых регуляторов найдены методом расширенных частотных характеристик и равны: для первого регулятора -  $S_0 = 0.00789$ ,  $S_1 = 0.774$ , а для второго -  $S_0 = 0.022$ ,  $S_1 = 0.733$ .

Построим переходные процессы на единичное ступенчатое возмущение в первой подсистеме по каналам  $W_{11}(p)$  и  $W_{12}(p)$  при различных настройках регулятора во второй подсистеме. Определим интегральный квадратичный критерий качества для каждого переходного процесса. Графики изображены на рис. 5-8 в соответствии с табл. 1. Левый график по каналу  $W_{11}(p)$ , а правый –  $W_{12}(p)$ . Пунктирной линией показан переходный процесс в системе с независимо найденными настроечными параметрами, а сплошной – в системе с настроечными параметрами, найденными при различных значениях добротности.

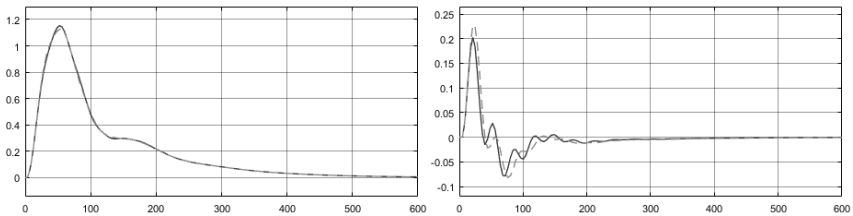
Интегральные квадратичные критерии для каждого эксперимента представлены в табл. 2.



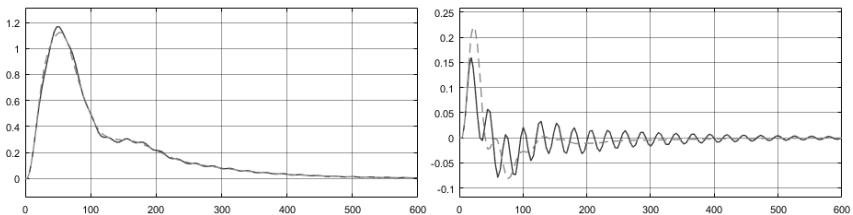
**Рис. 5. Реакция на ступенчатое воздействие в каналах  $W_{11}(p)$  и  $W_{12}(p)$  при  $i = 0.4$**



**Рис. 6. Реакция на ступенчатое воздействие в каналах  $W_{11}(p)$  и  $W_{12}(p)$  при  $i = 0.56$**



**Рис. 7. Реакция на ступенчатое воздействие в каналах  $W_{11}(p)$  и  $W_{12}(p)$  при  $i = 1,025$**



**Рис. 8. Реакция на ступенчатое воздействие в каналах  $W_{11}(p)$  и  $W_{12}(p)$  при  $i = 1,5$**

Как видно из рис. 5-8 и табл. 2, по первому каналу переходные процессы в системах с зависимой и независимой настройкой регуляторов практически не отличаются при изменении добротности системы. А по второму каналу, при увеличении добротности системы качество регулирования растет, однако при этом появляются слабозатухающие колебания, что свидетельствует о том, что вторая подсистема приближается к границе своей устойчивости, и при дальнейшем увеличении добротности система станет неустойчивой.

**Таблица 2. Зависимость квадратичного критерия качества переходных процессов от добротности системы**

№	$i$	С зависимой настройкой регуляторов		С независимой настройкой регуляторов	
		$I_{11}$	$I_{12}$	$I_{11}$	$I_{12}$
1	0.4	77,16	2,051	77,9	0,8275
2	0.56	77,43	1,345	77,9	0,8275
3	1.025	78,27	0,5799	77,9	0,8275
4	1.5	78,84	0,4015	77,9	0,8275

Из всего вышесказанного можно сделать вывод о том, что добротность отдельных контуров связана с качеством регулирования. Но необходимы дальнейшие исследования влияния добротности конкретных каналов влияет на качество регулирования системы в целом.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яковис Л.М. От единого информационного пространства к единому пространству управления производством // Автоматизация в промышленности. 2013. №1. С. 20-26.
2. Яковис Л.М. Автоматизированный расчет типовых регуляторов для многосвязных объектов управления / Л.М. Яковис, К.В. Спорягин // Автоматизация в промышленности. 2018. №4. С. 58-64.
3. Дядик В.Ф., Теория автоматического управления: учебное пособие / В.Ф. Дядик, С.А. Байдали, Н.С. Криничин; Нац. исслед. Томский политехн. ун-т. Томск: Изд-во Томского политехн. ун-та, 2011. 196 с.



# КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ НАУКИ

УДК 519.688

**А. В. Кузин**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, *e-mail*: [artcuz@bk.ru](mailto:artcuz@bk.ru)

## ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ФОРМУЛЫ ТАППЕРА К СТЕГАНОГРАФИИ

*В статье описан вариант применения самореферентной формулы Таппера в качестве одного из алгоритмов стеганографии с целью сокрытия важной информации, а также приведен краткий обзор существующих методов стеганографии.*

**Ключевые слова:** *стеганография, формула Таппера, самореферентность, защита информации, методы стеганографии.*

**A. V. Cuzin**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, *e-mail*: [artcuz@bk.ru](mailto:artcuz@bk.ru)

## ON ONE APPLICATION OF TUPPER'S SELF-REFERENTIAL FORMULA TO STEGANOGRAPHY

*The paper examines the possibility of using a Jeff Tupper's self-referential formula as one of the steganography algorithms in order to hide important information. Also, it provides provides an overview of the existing methods of steganography.*

**Keywords:** *steganography, Tupper's self-referential formula, protection of information, methods of steganography.*

Стеганография как фундаментальный подход к защите информации появилась задолго до появления криптографии. Первые упоминания об использовании стеганографии относятся к 440 году до н.э. [1]. Под стеганографией понимают комплекс различных методов, реализующих передачу и хранение информации с учётом сохранения в тайне самого факта такой передачи (хранения). Данные методы не обеспечивают шифрования информации, содержащейся в сообщении, поэтому являются лишь дополнением к криптографическим алгоритмам. Сообщения, скрытые стеганографическими алгоритмами, практически не привлекают к себе внимания,

в отличие от сообщений, факт шифрования которых не скрыт. Поэтому, несмотря на слабую защиту шифрованием либо полное её отсутствие, стеганография до сих пор широко распространена наряду с криптографией. Особенно актуальна стеганография для стран, где криптография запрещена, и само по себе зашифрованное сообщение может быть уличающим и вызывать подозрения [2].

Одним из пограничных методов стеганографии (с криптографической составляющей) может служить самореферентная формула, открытая выпускником кафедры компьютерных наук Университета Торонто Джеффом Таппером в 2001 году.

Для описания возможностей применения самореферентной формулы Таппера в качестве одного из алгоритмов стеганографии выделим понятие контейнера, под которым будем понимать некий объект для тайного внедрения сообщения, передаваемого по создаваемому стегосистемой стегоканалу. Доступ к скрытому содержимому в контейнере в данном методе будет осуществляться посредством ключа, который одновременно будет хранить информационную составляющую сообщения.

Рассмотрим существующие и наиболее распространенные методы стеганографии. Одним из таких методов является LSB-стеганография, иначе говоря – метод наименьших значимых битов, который заключается в замене последних значащих битов на биты скрываемого сообщения. При увеличении количества подменных бит, увеличивается количество артефактов в оригинальном контейнере. Данный метод легко реализуем, однако он является неустойчивым ко всем видам атак и не применим при наличии шумов в канале передачи данных. Обнаружение скрытого сообщения осуществляется по аномальным характеристикам распределения значений диапазона младших битов отсчётов цифрового сигнала. Например, для 8-битного изображения существует 256 градаций серого. Черный и белый цвета обозначаются как 00h и FFh, соответственно.

Имеется сообщение, состоящее из одного байта – 01101011b. При использовании 2-х младших бит в описаниях пикселей, нам потребуется 4 пикселя. Допустим, они чёрного цвета. Тогда пиксели, содержащие скрытое сообщение, будут выглядеть следующим образом: 00000001 00000010 00000010 00000011. Тогда цвет пикселей изменится: первого – на 1/255, второго и третьего – на 2/255 и четвёртого – на 3/255. Такие градации, мало того, что не заметны для человека, могут вообще не отобразиться при использовании низкокачественных устройств вывода.

Разновидностью LSB-метода является метод сокрытия информации младшими битами палитры. В этом случае информация встраивается в наименее значащие биты палитры изображения (в градациях серого). Недостатком LSB-подобных методов является низкая емкость контейнера [3].

Следующий метод также относится к LSB-подобным и основан на сокрытии данных в коэффициентах дискретного косинусного преобразования. Он активно используется, например, при внедрении сообщения в изображение формата JPEG. При прочих равных условиях, такой контейнер имеет несколько меньшую емкость, чем в чистом методе LSB, за счет того, что коэффициенты «0» и «1» остаются неизменными – внедрение сообщения в них невозможно [4].

Одним из простейших методов стеганографии можно считать метод сокрытия информации в служебных полях формата, основанный на использовании служебных полей заголовка контейнера для хранения сообщения. Этот метод также является низкочастотным и очень ненадежным, т.к. данные можно обнаружить обычными программами, которые иногда позволяют видеть содержимое служебных полей, например, метаданные фотографий EXIF отображаемые на хостингах изображений, либо метаданные ID3v2 MP3-файлов, используемые в медиа-плеерах.

Наиболее часто в стеганографии встречается метод наложения («метод оверлея»), основанный на том, что некоторые форматы содержат в заголовке размер данных и обработчик этих форматов будет читать файл до маркера конца данных. Примером такого метода является алгоритм «RAR-JPEG», который основан на конкатенации JPEG-изображения и RAR-архива. Просмотрщик изображений будет считывать информацию до границы, указанной в заголовке файла, а RAR-архиватор откинёт все, что находится до сигнатуры «RAR!», которая обозначает начало архива. Это означает, что данный файл может восприниматься и как изображение, и как архив разными программами. Сообщение, встроенное в контейнер, легко выделяется при визуальном исследовании такого файла, что является серьёзным недостатком метода наложения.

На основании приведенного обзора распространенных методов стеганографии сделаем вывод о том, что вышеописанные методы обладают низкой емкостью контейнера и минимальной устойчивостью, что негативно сказывается на защищенности информации.

Однако существует ещё одна группа методов, к которым можно отнести и предполагаемый алгоритм на основе формулы Таппера. Эти методы называются методами нелинейного встраивания сообщения и заключаются в том, что сообщение встраивается в контейнер, а затем, с помощью некоего алгоритма, известного обеим сторонам, извлекается. Можно построить несколько сообщений в один контейнер при условии, что способы их внедрения ортогональны, т.е. не пересекаются и не перекрывают содержимое элементов, образующих стегосистему [5].

Вполне успешно метод Таппера можно отнести и к широкополосным методам, а именно к методу псевдослучайной последовательности, в

которой используется секретный сигнал, моделируемый псевдослучайным сигналом.

Самореферентная формула (более корректно – неравенство) с уникальными свойствами была представлена Джеффом Таппером на ежегодной конференции по вопросам компьютерной графики «Special Interest Group on Graphics and Interactive Techniques» в 2001 году [6]. В докладе, посвященном созданию среды для отрисовки графиков любых функций «GrafEq», было упомянуто неравенство, которое, будучи отображено на плоскости, создаёт собственное изображение, т.е. обладает самореферентностью – способностью некоего понятия ссылаться на самого себя при определенных условиях. Данное неравенство приводится в следующем виде:

$$\frac{1}{2} < \left[ \text{mod} \left( \left\lfloor \frac{y}{17} \right\rfloor 2^{-17|x| - \text{mod}(\lfloor y \rfloor, 17)}, 2 \right) \right], \quad (1)$$

где  $\lfloor \cdot \rfloor$  обозначает функцию, называемую *полом* или *антье*, а  $\text{mod}$  – это оператор остатка от деления. *Пол* – это целая часть вещественного числа  $x$ , операция, которая сводится к округлению  $x$  до ближайшего целого в меньшую сторону.

На рис. 1 изображен график функции для удовлетворяющих неравенству точек в диапазоне  $0 \leq x \leq 106$  и  $k \leq y \leq k + 17$ .

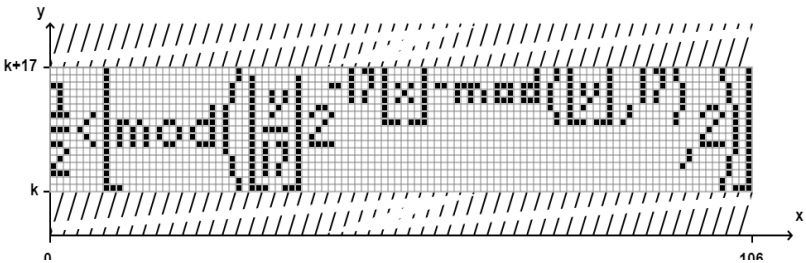


Рис. 1. График неравенства Траппера

Видно, что полученное графическое изображение в точности повторяет формулу, причем такой вид изображения задаётся при  $k$ , равном  
 4858450636189713423582095962494202044581400587983244549483093085  
 0619347047088099284506447698655243648499972470249151191104116057  
 3917740785691975432657185544205721044573588368182982375413963433  
 8225199452191651284348332905131193199953502413758765239264874613  
 3949068701305622958132194811136853395355652908500238750928568926  
 9455597428154638651073004910672305893358605254409666435126534936  
 3643957125565695936815184334857605266940161251266951421550539554  
 5191537854575257565907405401579290017659679654800644278291314885  
 48259914721248506352686630476300.

На графике функции, получаемой из неравенства Таппера, можно получить любое изображение, имеющее 17 пикселей в высоту и 106 – в длину, при этом для каждого изображения значение константы  $k$  будет уникально [7], что и делает возможным рассматривать формулу Таппера как контейнер, само неравенство – как стегосистему, а график функции – как стегоканал.

Формулу можно упростить, если обозначить всё, что округляется в правой части неравенства, за  $\alpha$ .

Тогда

$$\frac{1}{2} < [\alpha] \leftrightarrow 1 \leq [\alpha]. \quad (2)$$

Пусть

$$y = 17r + q, \quad (3)$$

где  $r$  – это целая часть от деления  $y$  на 17, а  $q$  – остаток. Таким образом, заменим в формуле  $\frac{y}{17}$  на  $r$ , а  $\text{mod}(y, 17)$  – на  $q$ .

Получаем

$$1 \leq \text{mod}(q * 2^{-17-r}, 2), \quad (4)$$

или же

$$1 \leq \text{mod}\left(\frac{q}{2^{-17x-r}}, 2\right), \quad (5)$$

где  $\text{mod}(a, 2)$  принимает значения 0 либо 1. Соответственно, неравенство (5) будет говорить нам о том, является ли число  $\frac{q}{2^{-17x-r}}$  чётным или нет. Нечётным оно будет тогда и только тогда, когда бит под номером  $17x + r$  в двоичном представлении числа  $q$  будет равен 1.

Таким образом, при использовании уникальной константы получается уникальное изображение на графике функции.

В формуле Таппера за  $k$  принимается определённая точка, находящаяся на большой высоте на оси ординат. По мнению ряда исследователей, неравенство Таппера, по аналогии с концепцией Вавилонской библиотеки [8], позволяет построить большое число изображений, но оно конечно [9]. При этом, при построении произвольных изображений, формула не будет содержать никаких ссылок на себя, что является главным параметром при решении вопроса о применимости и практичности стегосистемы. Константа  $k$  выглядит со стороны третьего лица, не участвующего в обмене информацией как случайная последовательность цифр, не подчиняющаяся каким-либо законам, что нельзя сказать о большинстве криптографических ключей, в которых можно найти какую-либо закономерность. В случае с константой  $k$ , такое становится невозможным, что позволяет применять формулу Таппера как готовый стеганографический метод, а са-

му константу рассматривать как псевдокриптографический ключ в составе более сложных криптографических систем.

Суть предполагаемого метода заключается в стеганографическом представлении криптографических ключей, где протоколы шифрования обеспечивают недостаточную надежность и защищенность от перехвата и декодирования. Также формулу Таппера можно использовать с целью сокрытия часто используемых аутентфикаторов (идентификаторов доступа, PIN-кодов, CVC-кодов). Причем такие аутентфикаторы принимают форму не символьных идентификаторов, а графических (т.н. условный графический идентификатор).

Так как графический идентификатор является растровым монохромным изображением, его можно рассматривать как особый контейнер, воспринимаемый вычислительными машинами, как графический файл, а людьми – как информацию, представленную текстовой строкой. Подобное представление пересекается с таблицей ASCII, в которой распространенным печатным символам присвоены уникальные числовые коды.

Алгоритм перевода скрытого сообщения в константу  $k$  является довольно простым. Предположим, что необходимо скрыть некоторую цифровую комбинацию (код). Для примера возьмём код «2525».

Далее, необходимо представить данный код в качестве монохромного растрового изображения 106x17 пикселей (рисунок 2).

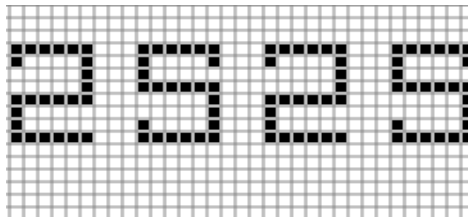


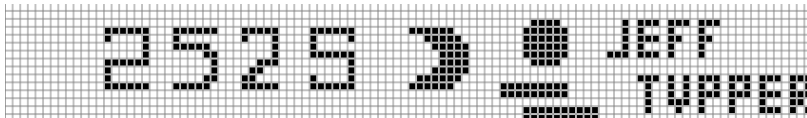
Рис. 2. Представление кода в качестве растрового изображения

Далее, двигаясь слева направо и снизу вверх необходимо записать в закрашенных участках единицы, а в пустых – нули, проделав эту процедуру на всём поле 106x17. Затем переводим полученную последовательность нулей и единиц в десятичное число и умножаем на 17. В данном случае, для графического изображения цифрового кода «2525», константа  $k$  будет равна

```
4708500228400238920571843523009606856364249864097480476476390181
9424583202575170148766999436956092258385477641214061952483295709
6063927676258876422613649975098694727174446611834407328672821036
54264745147130062628340744748842340812062720.
```

Чтобы декодировать полученную константу, необходимо повторить вышеописанные действия в обратном порядке.

Для повышения надежности сокрытия информации, можно изобразить повторяющиеся в коде цифры по-разному и добавить к изображению «шумы» (символы без информационной нагрузки) (рис. 3).



**Рис. 3.** Добавление «шумов» к изображению

При этом длина константы  $k$  увеличится, и она станет равной  
8599667900580328116847986653581506725483052446617935309187537734  
1964437569448121364354995525502693900838446613395022340121329172  
6090408650247836234103876580213657611323674460462556941696501730  
7466238856397828816060097564855207351381391930742598880247267954  
0637209033830418468465021876252862270214431674266414986772898002  
8595212745210759751623057149318877487763852782788107489598193178  
9512699666791818215393398228477265792863302687704487114966135807  
1804159578281491853467265648186562599030274144483209323806328372  
28802906629535152425037463552.

Таким образом, можно хранить и передавать некоторую важную информацию, выдавая её за некий криптографический ключ неизвестного алгоритма. Тем не менее, стеганографический метод на основе формулы Таппера имеет ряд недостатков. Один из них заключается в том, что объем константы в несколько раз превышает объем скрываемого сообщения. Например, для записи кода «2525» в кодировке UTF-16 необходимо 8 байт, а для константы, скрывающей данный код – 472 байта, что превосходит исходный объем в ~53 раза. С другой стороны, увеличение объема сообщения должно вводить в заблуждение третью сторону. Другим недостатком является отсутствие собственной криптостойкости (т.к. метод является стеганографическим), но в комбинации с криптоалгоритмами они могут взаимодополнять друг друга. Для успешного применения алгоритма на основе формулы Таппера, необходимо сохранять в тайне сам факт использования подобного алгоритма, как и в случае с прочими стеганографическими методами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Information Hiding: A Survey / *Fabien A. P. Petitcolas, Ross J. Anderson and Markus G. Kuhn* // Proceedings of the IEEE (special issue). 1999. Vol. 87, No. 7. С. 2062-1078.

2. *Pahati O.J.* Confounding Carnivore: How to Protect Your Online Privacy [Электронный ресурс] // AlterNet (29 November 2001). Режим доступа: [https://www.alternet.org/story/11986/confounding\\_carnivore%3A\\_how\\_to\\_protect\\_your\\_online\\_privacy](https://www.alternet.org/story/11986/confounding_carnivore%3A_how_to_protect_your_online_privacy).
3. *Champakamala B.S.* Least Significant Bit algorithm for image steganography / B.S. Champakamala, K. Padmini, D.K. Radhika // International Journal of Advanced Computer Technology (IJACT). 2014. Vol. 3, No. 4. С. 34-38.
4. *Филиппов М.В.* Метод сокрытия информации и квантованных коэффициентах дискретного косинус преобразования / М.В. Филиппов, С.А. Балашова // Инженерный вестник. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2016. С. 1-11.
5. *Меньшиков А.А.* Метод скрытого встраивания информации в векторные изображения. [Электронный ресурс] / А.А. Меньшиков, А.Н. Шниперов. Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/v/metod-skrytogo-vstraivaniya-informatsii-v-vektornye-izobrazheniya>.
6. *Tupper J.* Reliable Two-Dimensional Graphing Methods for Mathematical Formulae with Two Free Variables [Электронный ресурс] // SIGGRAPH. 2001. Режим доступа: [http://www.dgp.toronto.edu/people/mooncake/papers/SIGGRAPH2001\\_Tupper.pdf](http://www.dgp.toronto.edu/people/mooncake/papers/SIGGRAPH2001_Tupper.pdf);
7. *Weisstein, Eric W.* Tupper's Self-Referential Formula [Электронный ресурс] // MathWorld. 2011. Режим доступа: <http://mathworld.wolfram.com/TuppersSelf-ReferentialFormula.html>.
8. *Bloch, William Goldbloom.* The Unimaginable Mathematics of Borges' Library of Babel // Oxford University Press. 2008.
9. *Experimental Mathematics in Action / D.H. Bailey, J.M. Borwein, N.J. Calkin, R. Girgensohn, D.R. Luke, V.H. Moll.* Wellesley, MA: A K Peters, 2007. С. 289.

УДК 681.513

### **О. Ю. Марьясин, М. А. Белов**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, Ярославль, e-mail: [maryasinou@ystu.ru](mailto:maryasinou@ystu.ru), [michail96@bk.ru](mailto:michail96@bk.ru)

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ СМЕШАННОГО УПРАВЛЕНИЯ С РАЗНЫМИ ТИПАМИ РЕГУЛЯТОРОВ**

*Рассмотрена проблема возникновения автоколебательного режима при одновременном регулировании одного и того же технологического параметра несколькими системами регулирования, включающими разные типы (линейные и нелинейные) регуляторов. Предложено два способа решения данной проблемы, основанных на переключении контуров регулирования при приближении выходной переменной к заданному значению. Численные эксперименты в системе Simulink пакета MATLAB показали работоспособность предложенных алгоритмов.*

**Ключевые слова:** ПИД-регулятор, позиционный регулятор, автоколебания, MATLAB, Simulink.



**O. Yu. Maryasin, M. A. Belov**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: maryasinou@ystu.ru, michail96@bk.ru

## **SIMULATION OF A MIXED CONTROL SYSTEM WITH DIFFERENT TYPES OF REGULATORS**

*The paper considers the problem of the occurrence of a self-oscillation mode with the simultaneous regulation of the same technological parameter by several control systems, including different types (linear and nonlinear) of regulators. Two ways to solve this problem are proposed, based on switching control loops when the output variable approaches the specified value. Numerical experiments in the Simulink system of the MATLAB package confirmed the efficiency of the proposed algorithms.*

**Keywords:** PID controller, bang-bang controller, self-oscillation mode, MPC, MATLAB.

В настоящее время повышение степени автоматизации и интеллектуализации технических систем, переход к четвертой промышленной революции и массовое внедрение киберфизических устройств приводит к тому, что некоторые функции управления техническими системами начинают дублироваться или дополняться разными устройствами. Например, широко распространены системы, в которых традиционное водяное отопление в холодное время года сочетается с системой вентиляции с подогревом/охлаждением приточного воздуха или со сплит-системой, или с системой теплый пол и т.д. В таких системах на микроклимат внутри помещений здания можно воздействовать как системой водяного отопления, так и системой вентиляции/кондиционирования, так и другими способами. Их еще называют системами смешанного отопления. Различные системы должны согласованно поддерживать значения параметров микроклимата помещений вблизи от заданных значений, иначе их режим работы не является эффективным ни с точки зрения обеспечения максимальной комфортности, ни с точки зрения минимизации затрат энергоресурсов. Пример системы смешанного отопления рассматривался в [1], где была описана проблема автоколебательного режима, возникающая при одновременной работе систем отопления и вентиляции, и был предложен один из способов ее решения. По каким причинам пользователи включают сразу несколько систем автоматического регулирования одним и тем же технологическим параметром, по соображениям удобства, комфортности или каким-то другим, здесь не рассматривается. Главное что такие ситуации имеют место на практике. Подобные проблемы могут возникать не только при управлении микроклиматом помещений, но и в других областях, например, на производстве или на транспорте.

В данной работе авторы, без привязки к какой-то конкретной технической системе, постарались показать описанную проблему, на примере управления простым объектом с двумя разными типами регуляторов, один из которых является линейным, а другой нелинейным. Для моделирования систем регулирования использовалась система Simulink пакета MATLAB, широко известная специалистам по системам управления. Поэтому далее варианты структур систем регулирования будут показаны с помощью блок-диаграмм Simulink.

Рассмотрим простую одноконтурную систему регулирования по каналу возмущения с ПИД-регулятором, показанную на рис. 1. Одноконтурная система включает объект (блок Plant) с транспортным запаздыванием (блок Transport Delay), ПИД-регулятор (блок PID Controller), блок, имитирующий исполнительное устройство (ИУ) (блок Actuator). Единичный ступенчатый сигнал возмущения подается с помощью блока Step. Сигналы возмущения и управления с ИУ суммируются и подаются на вход объекта. Передаточные функции объекта и ИУ показаны на рис. 1. Величина транспортного запаздывания равна 1 с. Пропорциональная и интегральная настройки ПИД-регулятора равны по 0.1.

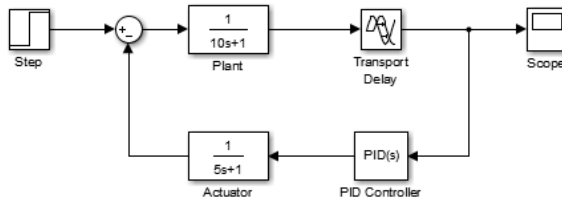


Рис. 1. Одноконтурная система регулирования с ПИД-регулятором

График переходного процесса на выходе объекта в системе регулирования с ПИД-регулятором за время 200 секунд показан на рис 2. Как видно из рис. 2, система регулирования является устойчивой, а выходной сигнал стабилизируется к величине задания равному нулю.

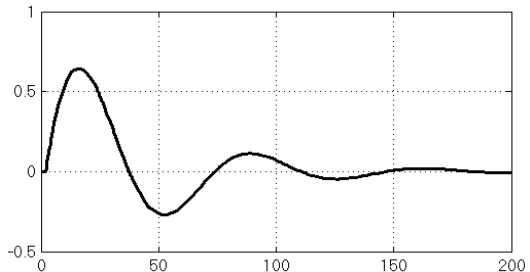


Рис. 2. Переходный процесс в системе регулирования с ПИД-регулятором

Рассмотрим также одноконтурную систему регулирования с релейным (позиционным) регулятором, показанную на рис. 3. Система на рис. 3 имеет такой же объект, с таким же транспортным запаздыванием, как и на рис. 1, но в качестве регулятора выступает реле с гистерезисом и используется немного другая передаточная функция ИУ. Параметры реле: значение выходного сигнала во включенном состоянии равно 1, в выключенном равно -1, величина гистерезиса 0.2. График переходного процесса на выходе объекта в системе регулирования с ПИД-регулятором за время 200 секунд показан на рис. 4.

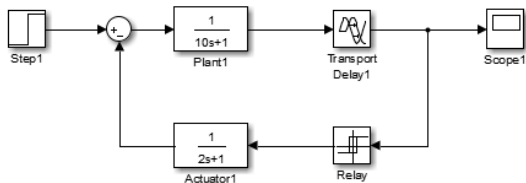


Рис. 3. Одноконтурная система регулирования с релейным регулятором

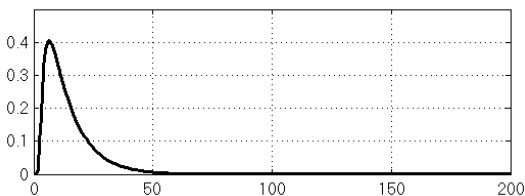


Рис. 4. Переходный процесс в системе регулирования с релейным регулятором

Как видно из рис. 4, система регулирования с релейным регулятором также является устойчивой.

Теперь объединим обе рассмотренные ранее системы регулирования в одну систему, показанную на рис. 5. Схема на рис. 5 имеет такие же блоки, с такими же значениями параметров, как и на предыдущих схемах. График переходного процесса на выходе объекта в объединенной системе показан на рис. 6.

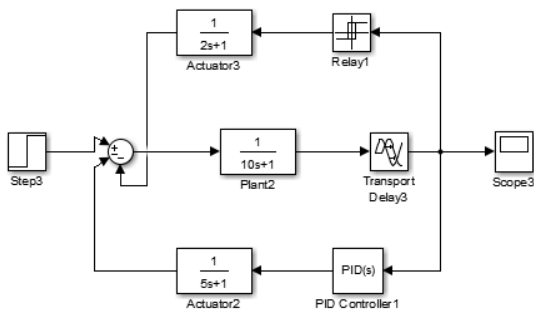
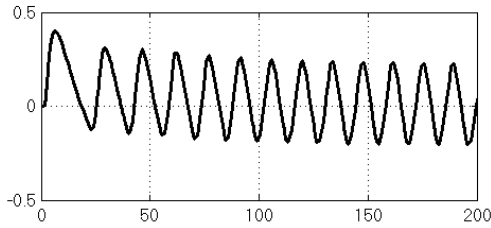


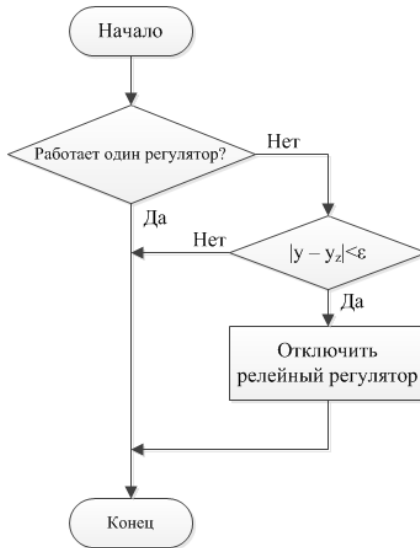
Рис. 5. Система регулирования с разными регуляторами



**Рис. 6. Переходный процесс в смешанной системе регулирования**

Как видно из рис. 6, в схеме, полученной объединением систем, каждая из которых была устойчивой, образовался автоколебательный режим. Для специалистов в области теории управления здесь, в принципе, ничего удивительного нет. В объединенной схеме по сравнению со схемой с релейным регулятором произошло усложнение линейной части системы, что, в данном случае, и привело к возникновению автоколебаний.

Теперь попробуем ответить на вопрос, как сделать так, чтобы при одновременной работе систем получить устойчивую систему с хорошим отслеживанием сигнала задания. Авторы предлагают два способа решения данной проблемы. Алгоритм первого способа поясняется блок-схемой, показанной на рис. 7.



**Рис. 7. Блок-схема алгоритма первого способа**

В соответствии с данным алгоритмом, когда оказываются включенными обе системы регулирования, то начинает контролироваться степень близости выходной переменной  $y$  заданному значению  $y_z$ . Если выходная переменная приблизится к заданному значению на величину меньшую положительного числа  $\varepsilon$ , то необходимо отключить контур системы регулирования с релейным регулятором.

Блок-диаграмма, соответствующая первому способу, показана на рис. 8. Проверка условия  $|y - y_z| < \varepsilon$  производится с помощью блоков Fcn и Compare To Constant. Величина  $\varepsilon$  принимается равной 0.2. Отключение релейной системы производится с помощью блока Switch. График переходного процесса на выходе объекта в смешанной системе регулирования показан на рис. 9. Как видно из графика, имеется небольшой участок, на котором выходная переменная колеблется около значения 0.2, а затем она стабилизируется к заданному значению. Вопросы безударного переключения с режима на режим здесь, для простоты, не рассматриваются.

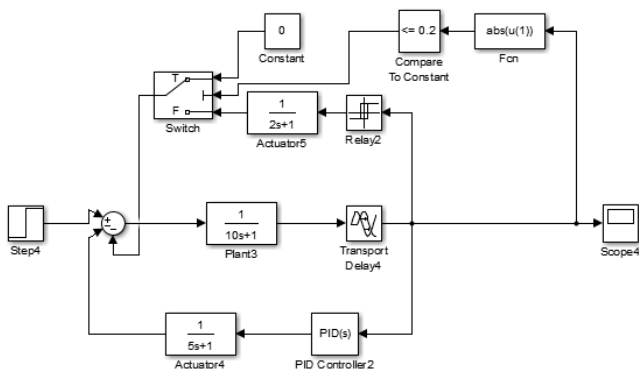


Рис. 8. Смешанная система регулирования по каналу возмущения для первого способа

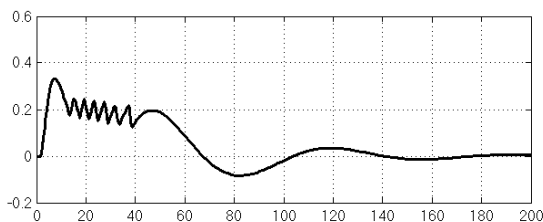


Рис. 9. Переходный процесс в смешанной системе регулирования по каналу возмущения для первого способа

Алгоритм второго способа поясняется блок-схемой, показанной на рис. 10. В данном алгоритме, по сравнению с предыдущим, когда оказываются включенными обе системы регулирования, то отключается система регулирования с ПИД-регулятором. Если выходная переменная приблизится к заданному значению на величину меньшую положительного числа  $\varepsilon$ , то необходимо отключить контур системы регулирования с релейным регулятором и включить контур с ПИД-регулятором.

Блок-диаграмма, соответствующая второму способу показана на рис. 11. Данная схема отличается от схемы, приведенной на рис. 8, тем, что блок Switch при приближении выходной переменной к заданному значению на величину  $\varepsilon$  отключает релейную систему и включает систему с ПИД-регулятором. График переходного процесса на выходе объекта в смешанной системе регулирования показан на рис. 12. На данном графике также имеется небольшой участок, на котором выходная переменная колеблется около значения 0.2, а затем она стабилизируется к заданному значению.

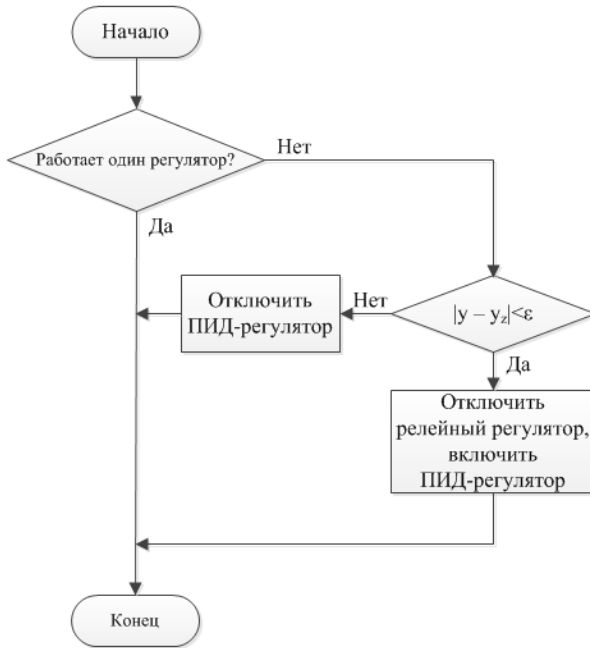


Рис. 10. Блок-схема алгоритма второго способа

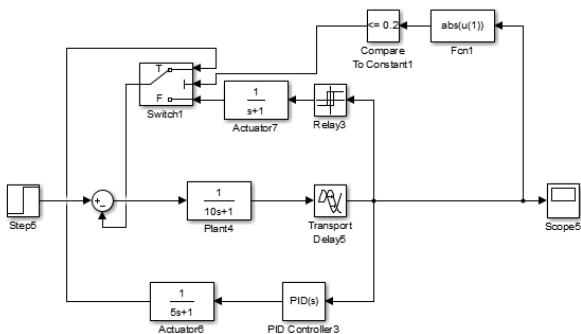


Рис. 11. Смешанная система регулирования по каналу возмущения для второго способа

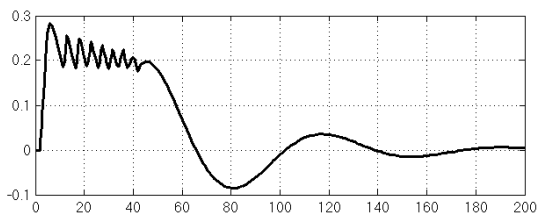


Рис. 12. Переходный процесс в смешанной системе регулирования по каналу возмущения для второго способа

Можно показать, что аналогичные результаты можно получить и для систем регулирования с ПИД и релейными регуляторами по каналу задания. Блок-диаграмма системы регулирования по каналу задания, соответствующая первому способу, показана на рис. 13. График переходного процесса на выходе объекта в смешанной системе регулирования показан на рис. 14.

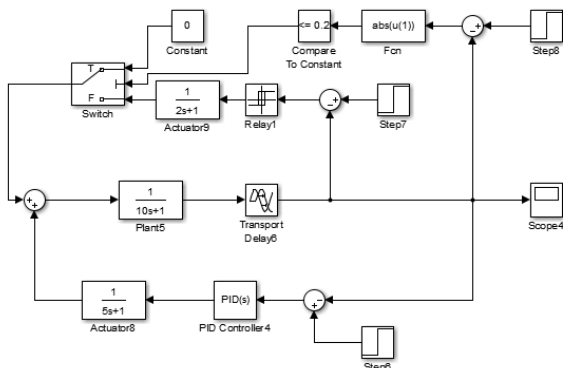
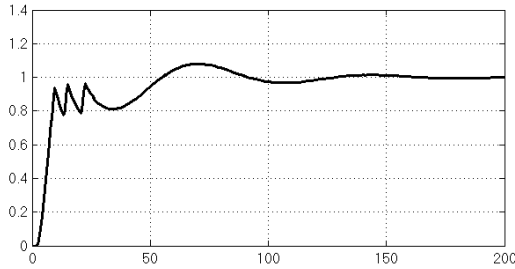
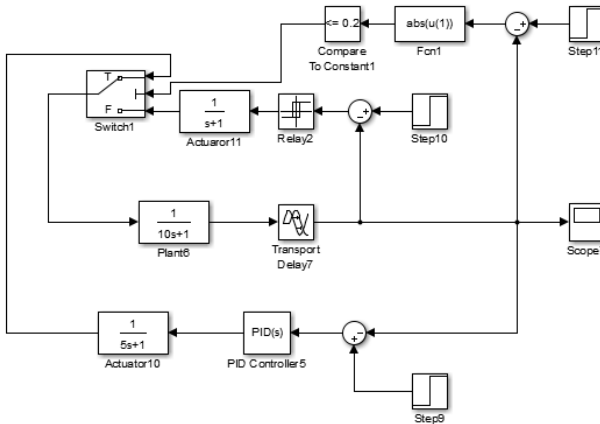


Рис. 13. Смешанная система регулирования по каналу задания для первого способа



**Рис. 14. Переходный процесс в смешанной системе регулирования по каналу задания для первого способа**

Блок-диаграмма системы регулирования по каналу задания, соответствующая второму способу, показана на рис. 15. График переходного процесса на выходе объекта в смешанной системе регулирования будет подобен показанному на рис. 14.



**Рис. 15. Смешанная система регулирования по каналу задания для второго способа**

В схемах на рис. 13 и 15 величина задания (см. блоки Step6, Step7, Step8 на рис. 13 и блоки Step9, Step10, Step11 на рис. 15) принималась равной единице. При изменении значения задания необходимо следить, чтобы параметры реле (значения выходного сигнала во включенном и выключенном состоянии) соответствовали уровню сигнала задания. Кроме того, для исключения автоколебаний, при больших значениях задания может потребоваться изменение параметра  $\varepsilon$ . Однако обеспечение точного от-



слеживания задания смешанной системой регулирования в широком диапазоне значений не является целью данной работы.

Предполагается, что системы регулирования предварительно настроены на одинаковый уровень задания. Подробное обсуждение случая, когда системы регулирования предварительно настроены на разный уровень задания, также выходит за рамки данной статьи. Можно только сказать, что небольшое расхождение заданий в системах регулирования не влияет на устойчивость смешанной системы, если задание в схеме сравнения (см. блок Step8 на рис. 13 и блок Step11 на рис. 15) изменяется синхронно с заданием в контуре регулирования с ПИД-регулятором.

Предложенные стратегии можно использовать и в случае, когда число одновременно работающих систем регулирования больше двух. Тогда все контура регулирования нужно разделить на две группы: линейные (с П-, ПИ-, ПИД-регуляторами, оптимальными линейными регуляторами) и нелинейные (с позиционными, оптимальными нелинейными регуляторами). После этого можно использовать предложенные алгоритмы, используя вместо ПИД-регулятора всю группу линейных регуляторов, а вместо релейного регулятора всю группу нелинейных регуляторов. При этом потребуются дополнительный анализ устойчивости смешанной системы регулирования.

Сравнение предложенных способов показывает, что достоинством первого способа является его более простая реализация, требующая меньшего числа переключений контуров регулирования. Недостатком первого способа являются большие затраты энергии на управление при одновременной работе обеих контуров регулирования. Оба способа можно довольно просто реализовать технически, особенно если контуры регулирования выполнены программно на базе программируемого логического контроллера или интеллектуального киберфизического устройства.

В результате анализа литературных источников можно найти системы автоматического регулирования, работающие по алгоритмам, похожим на алгоритмы, предлагаемые в данной работе. Так в [2] обсуждается комбинированный позиционный регулятор Флюгге-Лотц. Данный регулятор работает как позиционный, если выходной сигнал находится далеко от задания, и переключается в режим ПИ-регулирования, как только выходной сигнал попадает в малую окрестность задания. Этим обеспечивается отсутствие автоколебаний в окрестности задания. В [3] дано описание следящей системы регулирования, целью которой является обеспечение точного отслеживания задания в широком диапазоне его изменения. При этом реализуется следующий алгоритм работы. Если новое значение задания сильно отличается от его предыдущего значения, то работает ПИД-регулятор. Если отличие незначительное, то вместо ПИД-регулятора

включается позиционный (Bang-Bang) регулятор. Когда выходная переменная приближается к заданию, позиционный регулятор отключается и снова включается ПИД-регулятор. Авторы утверждают, что такой алгоритм обеспечивает наилучшее качество регулирования в широком диапазоне изменения задания. Основное отличие алгоритмов, предложенных в [2, 3] от рассмотренных в данной статье в том, что в них позиционный и ПИД-регуляторы не предназначены для работы по отдельности, а специально комбинируются для получения более высокого качества регулирования.

Таким образом, в данной статье была рассмотрена проблема возникновения автоколебательного режима при одновременном регулировании одного и того же технологического параметра несколькими системами регулирования, включающими разные типы (линейные и нелинейные) регуляторов. Предложены два способа решения данной проблемы, основанных на переключении контуров регулирования при приближении выходной переменной к заданному значению. Численные эксперименты в системе Simulink пакета MATLAB подтвердили работоспособность предложенных алгоритмов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колодкина А.С.* Энергоэффективное управление при смешанном отоплении здания / А.С. Колодкина, О.Ю. Марьясин // Сб. тр. XXVIII междунар. науч. конф. "Математические методы в технике и технологиях ММТТ-28". Т. 9. Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т. 2015. С. 39-43.
2. Математическое моделирование технологических процессов / В.С. Балакирев, С.И. Дворецкий, Н.Н. Аниськина, В.Н. Акишин; под ред. В.С. Балакирева. Ярославль: Издат. дом Н.П. Пастухова, 2018. 352 с.
3. *Лiu X., Li M.* Wide running control integrated bang-bang control with regulatory control: strategy, approach and performance. 2016. Vol. 23, no. 4. P. 1303-1315.

# БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ И НАУКИ О ЗЕМЛЕ

УДК 57.087.1:57.022

**А. С. Ермишин**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: ermishinas@ystu.ru

## ОБ ИССЛЕДОВАНИИ АДАПТАЦИИ ЖИВОТНЫХ МЕТОДОМ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ АДАПТОМЕТРИИ

*Рассматривается методика изучения адаптации сельскохозяйственных животных при помощи подхода корреляционной адаптометрии. Изложена краткая теория вопроса. Даны преимущества и недостатки применения такого метода в практике ветеринарно-зоотехнических исследований.*

**Ключевые слова:** корреляционная адаптометрия, корреляции физиологических показателей, адаптированность, сельскохозяйственные животные.

**A. S. Ermishin**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: ermishinas@ystu.ru

## ON THE RESEARCH OF ANIMAL ADAPTATION BY THE METHOD OF CORRELATION ADAPTOMETRY

*The technique of studying the adaptation of farm animals using the approach of correlation adaptometry is considered. A brief theory of the problem is presented. Advantages and shortcomings of application of such method in practice of veterinary and zootechnical researches are given.*

**Keywords:** correlation adaptometry, correlations between physiological parameters, adaptedness, farm animals.

Проблемой адаптации импортных животных к условиям советских, а затем и российских комплексов и ферм занимаются отечественные учёные уже с 1970–1980-х гг., но в какой-то момент времени скот в нашей стране перестали закупать. В последнее время данная проблема вновь стала актуальной [1].

По данным Федеральной таможенной службы РФ [2], только за последние 5 лет импорт в Россию крупного рогатого скота составил 551 тыс. голов на общую сумму 1,07 млрд долларов США и продолжает расти с каждым годом (рис. 1).

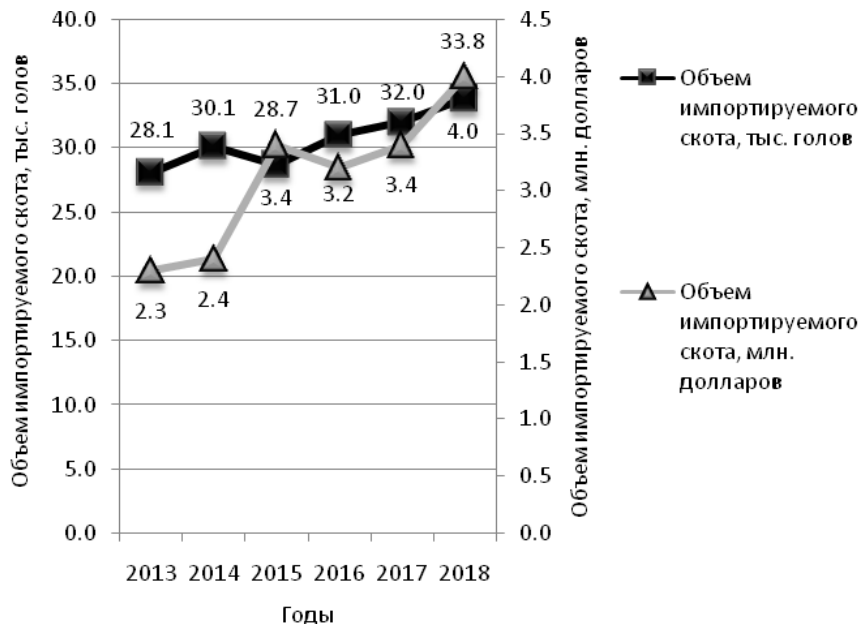


Рис. 1. Динамика импорта скота в РФ за 2013-2018 гг.

В основном импортировался чистопородный племенной скот (81%), и различный помесный скот неплеменного назначения (19%).

В структуре импорта по странам на первом месте находилась Австралия (26%), на втором – США (24%).

К изучению проблем адаптации животных применяется на сегодняшний день много подходов, в том числе и довольно затратные, но не один из них, на наш взгляд, не может адекватно раскрыть механизмы адаптации, так как не охватывает полностью все аспекты изучения.

Более тридцати лет назад (1987, 1988) нашими учеными – А.Н. Горбань, В.Т. Манчук, Е.В. Петушковой, К.Р. Седовым, Е.Н. Шаламовой [3, 4] был обнаружен эффект, проявляющийся в группах и популяциях людей, находящихся в тяжелых условиях существования. Было дано первое теоретическое объяснение, связавшее новый эффект с фундаментальной про-

блемой моно- или полифакториальности в экологии, а также найдено много данных других авторов, подтверждающих эффект.

В течение многих лет ими проводились многочисленные исследования с целью прояснить границы существования эффекта, то есть выяснить возможные условия его разрушения и найти примеры таких условий. Одновременно он сам стал мощным средством сравнения уровня адаптационного напряжения, в котором пребывают различные группы людей.

По окончании многолетнего цикла исследований стало ясно, что полная теория обнаруженного эффекта, с необходимостью включающая и описание границы его существования, захватывает много идей и концепций, а вне этого контекста не может быть изложена.

Авторы дали название эффекту – «эффект группового стресса». Именно так они охарактеризовали описанные изменения в коэффициентах корреляций между физиологическими параметрами и в дисперсиях этих параметров для групп организмов при изменении условий жизни.

Как пишет один из авторов, открывших эффект группового стресса, Е.В. Смирнова [5], для изучения адаптированности сравнение популяций по числу действующих факторов для либиховских систем факторов может служить полезным средством. Исследованиями установлено, что корреляционные характеристики намного чувствительнее к адаптационному напряжению, нежели абсолютные величины параметров организмов. Основанный на этом подход к изучению адаптации и его практическое применение к диспансеризации человеческих популяций названы авторами методом корреляционной адаптометрии [3, 4]. Нам представляется перспективным применение этого подхода и для исследований адаптированности сельскохозяйственных животных, в особенности молочного скота, импортируемого в Россию из-за рубежа, к изменяющимся условиям среды, в том числе к экстремальным условиям различных экологогеографических зон Российской Федерации и других стран.

Согласно концепции, степень скоррелированности физиологических параметров предполагается оценивать с помощью веса корреляционного графа, рассчитываемого как сумма весов его ребер (сумма соответствующих коэффициентов корреляции):

$$G = \sum_{|r_{ij}| \geq \alpha} |r_{ij}|, \quad (1)$$

где  $r_{ij}$  – коэффициент корреляции между  $i$ -м и  $j$ -м параметрами;

$\alpha$  – уровень значимости, определяет уровень достоверности коэффициентов корреляции (принимаются во внимание только достоверные коэффициенты корреляции, значения которых больше или равны  $\alpha$ ).

Уровень значимости в зависимости от распределения данных вычисляется по формуле  $\alpha = 1 - \gamma$  при одностороннем распределении и по формуле  $\alpha = 1 - 2\gamma$  при двустороннем распределении, где  $\gamma$  – доверительная вероятность.

При применении метода корреляционной адаптометрии для каждой группы данных авторами метода [3, 4] рекомендуется производить следующие операции:

1. Выполняется проверка гипотезы о нормальности распределения выборки по критерию  $\chi^2$ .

2. Стандартизуется матрица данных, для чего переменные  $z$  заменяются на переменные  $x$  по формуле

$$x_{ij} = \frac{z_{ij} - \bar{z}_j}{\sigma_j},$$

где  $\bar{z}_j$  – среднее значение  $j$ -го признака:

$$\bar{z}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{ij};$$

$\sigma_j^2$  – дисперсия  $j$ -го признака:

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{n} \sum (z_{ij} - \bar{z}_j)^2.$$

3. Для всех показателей (признаков) вычисляются парные коэффициенты ковариации

$$\text{cov}(x_k, x_l) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (x_{ki} - \bar{x}_k)(x_{lj} - \bar{x}_l),$$

где  $N$  – количество объектов в группе, и корреляции

$$r_{kl} = \frac{\text{cov}(x_k, x_l)}{\sigma_{x_k} \cdot \sigma_{x_l}},$$

где  $\sigma_{x_k}$  – стандартное отклонение по  $x_k$ ;  $\sigma_{x_l}$  – стандартное отклонение по  $x_l$ .

4. Определяется достоверность коэффициентов корреляции.

5. Рассчитывается вес корреляционного графа по формуле (1).

6. Для определения статистической достоверности при сравнении весов корреляционного графа используются методы бутстрепа и «складного ножа» [6, 7].

Оценка достоверности различий групп объектов по степени скоррелированности набора показателей может быть произведена с помощью интервального оценивания веса корреляционного графа. В частности, выборки бутстрепа генерируются следующим образом: по исходным данным получают большое количество копий, которые затем тщательно перемешиваются. Далее случайным образом формируются выборки такого же объема, как исходная. По полученным выборкам подсчитываются коэффициенты корреляции и для них находятся стандартные статистические характеристики, в частности, доверительный интервал. Теоретические исследования [8] показали, что для коэффициентов корреляции ширина интервала, соответствующего распределению бутстрепа, и ширина интервала, соответствующего реальному распределению, как правило, совпадают. Вероятность попадания значений веса корреляционного графа случайной выборки из исследуемых групп в доверительный интервал составляет 95%.

Однако для оценки взаимосвязи между различными физиологическими показателями могут быть использованы алгебраические параметры спектра корреляционной  $n \times m$ -матрицы  $Z = (Z_{ij})$ , элемент  $Z_{ij}$  которой есть значение  $j$ -го признака у  $i$ -го объекта группы (каждый из  $n$  объектов представляется вектором наблюдений из  $m$  признаков). В [9] показано, что элементы спектра являются устойчивыми характеристиками и их взаимное расположение характеризует взаимосвязи во множестве переменных. Спектр корреляционной матрицы используется в основном в практических применениях метода главных компонент, в [6, 10-13] оценки связей рассматриваются шесть функциональных параметров  $f_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 6$ :

$$f_1 = \sum_{j=1}^k \lambda_j,$$

где  $\lambda_j$  – собственные числа корреляционной матрицы;

$$f_2 = \sum_{j=1}^k \lambda_j^2$$

– значение избыточности системы признаков; чем больше этот показатель, тем сильнее степень выраженности мультиколлинеарности;

$$f_3 = \lambda_1 / \lambda_k$$

– число обусловленности корреляционной матрицы; в вычислительной математике оно служит количественной мерой независимости, если это число близко к 1, то столбцы исходной матрицы данных линейно зависимы в сильной степени.

$$f_4 = \left( \sum_{j=1}^l \lambda_j \right) / f_1$$

– доля первых  $l$  главных компонент, где  $l$  равно числу доминирующих элементов спектра;

$$f_5 = \prod_{j=1}^k \lambda_j$$

– определитель корреляционной матрицы;

$$f_6 = \sum_{i=2}^k \lambda_{i-1} / \lambda_i$$

– суммарный показатель меры удаленности элементов спектра друг от друга.

Чтобы обосновать необходимость применения веса корреляционного графа  $G$  и алгебраических параметров спектра корреляционной матрицы в исследованиях адаптации животных, рассмотрим преимущества и недостатки обоих подходов.

Точность оценки взаимосвязи между физиологическими показателями при помощи веса корреляционного графа, по мнению авторов метода [3, 4], зависит от точности оценок элементов корреляционной матрицы. Точность последней, в свою очередь, зависит от качества выборки данных и, в первую очередь, от количества объектов в выборках. В то же время при достаточно выраженной степени взаимосвязей во множестве переменных спектр корреляционной матрицы является устойчивой статистикой, а устойчивость собственных векторов, соответствующих элементам спектра, тем сильнее выражена, чем больше отличаются друг от друга элементы спектра [9]. Однако из [9, 12] известно, что объем выборки, необходимый для оценки  $l$  собственных чисел ее корреляционной матрицы, должен превышать  $l$  независимо от  $m$  в 2-3 раза. В настоящее время нет единого метода определения числа  $l$  и суммарной доли выделяемых факторов  $f_4$ . Разработано более 20 способов определения числа  $l$  в рамках трех подходов: алгебраического, статистического и психометрического.

При обработке ветеринарно-зоотехнической информации исследователи очень часто сталкиваются с матрицами данных, имеющими пропуски, так как не всегда представляется возможным зафиксировать все значения изучаемых показателей. При обработке таких массивов данных применяют следующие подходы:

1. Если объем выборки позволяет, то из нее исключаются объекты, имеющие неполное описание;

2. Пропуски заполняются;



3. Исследователи стараются извлечь из имеющейся выборки максимум информации без заполнения пропусков, используя при вычислении коэффициентов корреляции каждую из имеющихся пар показателей.

Первый подход требует большого объема выборки. Второй, широко распространенный подход, обладает тем недостатком, что не всегда удается автоматизировать процесс заполнения пропусков из-за сильной зависимости показателей друг от друга, приходится формулировать критерий заполнения для каждого показателя в отдельности. Третий подход используют в случае уникальности обрабатываемого материала.

Ученые-физиологи, ветеринарные специалисты и зооинженеры-генетики предпочитают третий подход, так как всегда считают с большим трудом данные уникальными, боятся потерять каждый объект наблюдений и находят недопустимым искусственное введение показателей в их выборки, особенно, если речь идет о биохимических исследованиях крови, полученной из вены. Такие данные действительно уникальны, так как при исследовании адаптационных процессов проводится обследование здоровых по существующим медицинским показаниям животных. А если это молодежь, и, тем более, новорожденные животные, то результаты обследования становятся не просто уникальными, а драгоценными.

При применении третьего метода при вычислении коэффициентов корреляции с использованием каждой имеющейся пары значений показателей часто получают матрицу коэффициентов корреляции, не являющуюся положительно определенной. Для таких матриц, естественно, невозможно рассчитать собственные значения и, соответственно, алгебраические параметры спектра.

Резюмируя вышесказанное, можно сделать следующие выводы.

1. Если исследователи имеют полный набор данных у всех объектов наблюдения, оценку скоррелированности физиологических параметров можно проводить и весом корреляционного графа, и алгебраическими параметрами спектра корреляционной матрицы.

2. В случае невозможности расчета элементов спектра корреляционной матрицы оценку адаптационного напряжения можно проводить только весом корреляционного графа  $G$ , а при сравнительном анализе получать достоверные интервалы для  $G$  методом бутстрепа или «складного ножа».

3. При практическом использовании метода корреляционной адаптометрии из алгебраических параметров спектра, согласно [5], наиболее наглядную разницу при сравнении дают показатели  $f_2$ ,  $f_3$  и  $f_6$ . Наиболее значимое различие групп прослеживается при сравнении по весу корреляционного графа.

4. Метод корреляционной адаптометрии целесообразно использовать при изучении проблем адаптации импортного скота в условиях Российской Федерации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ермишин А.С.* Философские вопросы животноводства: приспособляемость организмов в филогенезе / А.С. Ермишин, Н.А. Личак // Юбилейная семидесятая всерос. науч.-техн. конф. студентов, магистрантов и аспирантов с международным участием «Научно-технические и инженерные разработки – основа решения современных экологических проблем». 19 апреля 2017 г., Ярославль: сб. материалов конф. В 3 ч. Ч. 3. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2017. С. 899-903.
2. Официальный сайт Федеральной таможенной службы РФ [Электронный ресурс]. URL: <http://www.customs.ru/index.php>
3. *Горбань А.Н.* Динамика корреляций между физиологическими параметрами при адаптации и эколого-эволюционный принцип полифакториальности / А.Н. Горбань, В.Т. Манчук, Е.В. Петушкова // Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем. Л.: Гидрометеиздат, 1987. Т. 10. С.187-198.
4. Корреляционная адаптометрия как метод диспансеризации населения / К.Р. Семенов, А.Н. Горбань, Е.В. Петушкова, В.Т. Манчук, Е.Н. Шаламова // Вестник АМН СССР. 1988. № 10. С. 69-75.
5. *Смирнова Е.В.* Моделирование адаптации к экстремальным условиям, эффект группового стресса и корреляционная адаптометрия: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 05.13.16. Красноярск, 2000. 273 с.
6. *Жанатаев С.У.* Обратная модель главных компонент и ее применение: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.11 / АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ. Новосибирск, 1987. 302 с.
7. *Bilker Warren B.* Bootstrapping left truncated and right censored data / Warren B. Bilker, Mei-Cheng Wang // Commun. Statist. Simul. and Comput. 1997. Vol. 26, № 1. P. 141-171.
8. *Воробьев Е.И.* Оценка степени напряжения адаптационных механизмов организма по степени связанности его физиологических параметров / Е.И. Воробьев, В.Ю. Резниченко // Адаптация человека к климатогеографическим условиям и первичная профилактика: материалы IV Всесоюз. конф. Новосибирск, 1986. Т. 1. С. 14-15.
9. *Фукунага К.* Введение в статистическую теорию распознавания образов. М.: Наука, 1979. 368 с.
10. *Демиденко Е.З.* Линейная и нелинейная регрессия. М.: Финансы и статистика, 1981. 302 с.
11. *Дубров А.М.* Обработка статистических данных методом главных компонент. М.: Статистика, 1978. 135 с.
12. *Стренг Г.* Линейная алгебра и ее применение. М.: Мир, 1980. 454 с.
13. *Харман Г.* Современный факторный анализ. М.: Статистика, 1972. 486 с.

УДК 539.17:539.126:631.48

**А. А. Залуцкий**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: zalutskii@mail.ru

## **ЗОНДОВАЯ МЕССБАУЭРОВСКАЯ ДИАГНОСТИКА СТРУКТУРЫ КВАЗИЖИДКОГО СЛОЯ ПОВЕРХНОСТНОГО ЛЬДА ПРИ КОНТАКТЕ С ПРИРОДНОЙ ГЛИНОЙ**

*Приводятся результаты по структуре квазижидкого слоя воды в системе «замороженная вода – глинистый минерал» при использовании зондовой методики, разработанной на базе мёссбауэровского изотопа  $^{57}\text{Fe}$  в двух формах ( $\text{Fe}^{2+}$  и  $\text{Fe}^{3+}$ ). В рамках фрактальной геометрии выполнена оценка упругих параметров (модуль сдвига, коэффициент Пуассона, параметр Грюнайзена) у поверхностного льда и с уменьшением толщины слоя установлен переход «Губка Менгера» → «Пыль Канторова». Представленные результаты будут полезны в решении прикладной проблемы – построения отсутствующего на настоящий момент объяснения механизма «получения» природных нанотрубок.*

**Ключевые слова:** Мёссбауэровская спектроскопия, квазижидкий слой воды, модуль сдвига, коэффициент Пуассона, параметр Грюнайзена, фракталы, фрактальная геометрия, губка Менгера, пыль Канторова.

**A. A. Zalutskii**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: zalutskii@mail.ru

## **PROBE MÖSSBAUER DIAGNOSIS THE STRUCTURE OF THE QUASI-LIQUID LAYER OF SURFACE ICE UPON CONTACT WITH NATURAL CLAY**

*The results on the structure of the quasi-liquid water layer in the "frozen water – clay mineral" system using the probe technique developed on the basis of the mössbauer isotope  $^{57}\text{Fe}$  in two forms ( $\text{Fe}^{2+}$  and  $\text{Fe}^{3+}$ ) are presented. In the framework of fractal geometry, the elastic parameters (shear modulus, Poisson's ratio, Grüneisen parameter) were estimated at the surface ice and the transition "Menger's Sponge" → "Kantorov's Dust" was established with a decrease in the layer thickness. The presented results will be useful in solving the applied problem – the construction of the missing explanation of the mechanism of "obtaining" natural nanotubes.*

**Keywords:** Mössbauer spectroscopy, quasi-liquid water layer, shear modulus, Poisson's ratio, Grüneisen parameter, fractals, fractal geometry, Menger sponge, Kantor dust.

*«... У геометрии природы  
фрактальное лицо»  
Б. Мандельброт*

## **Введение**

В 1850-е годы М. Фарадей предположил, что на поверхности льда имеется тонкий слой жидкой воды ниже температуры объемного плавления льда (273 К). Подтверждением гипотезы наглядно послужил проведенный им эксперимент, при котором вместе «сплавлялись» соприкасающиеся куски льда. Намного позже многочисленные экспериментальные и теоретические исследования (см., например, обзор [1] и ссылки в нем) подтвердили наличие квазижидкого слоя (КЖС), но его физическое происхождение и свойства (толщина, плотность и т.п.) остаются и на настоящий момент предметом дискуссии.

Особо отметим, что в литературе информация о свойствах воды при использовании такого мощного с экспериментальной точки зрения метода, как МС, практически полностью отсутствует. По физическим соображениям такое состояние дел понятно, поскольку «жидкая» вода весьма неудобный объект и поэтому необходима дополнительная емко-затратная экспериментальная модернизация классического мессбауэровского эксперимента [2]. В классическом варианте задача частично решалась с помощью процедуры замораживания исходных растворов [3], но отсутствие должной физической информации о структуре воды на тот период времени (современное состояние физики воды см., например, в [4]), по-видимому, сдерживало адекватную интерпретацию эпизодических мессбауэровских результатов.

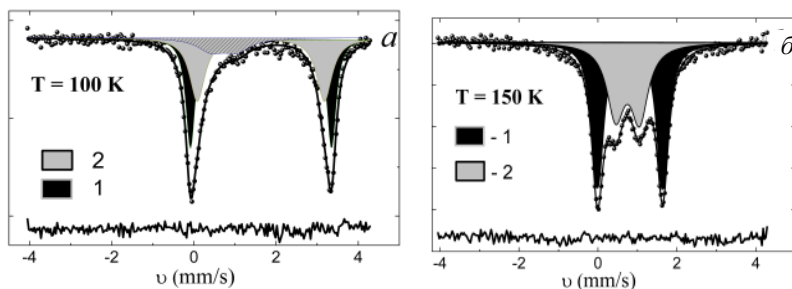
Основным результатом последних экспериментов по использованию синхротронных источников перестраиваемого по энергии рентгеновского излучения (см. ссылки в [4]) стал вывод о том, что вода на масштабах порядка 1-2 нм состоит из неоднородностей плотности с двумя структурно различающимися мотивами. Указанный факт совместно с нашими ранними данными [5] послужил мотивацией для проведения исследования методом МС гетерогенности поверхностных слоев переохлажденной воды. Задача решалась при помощи анализа температурного поведения мессбауэровских параметров экспериментальных спектров в рамках физической (квантовой и/или классической) природы аномалий и свойств воды. Наряду с обнаружением в метастабильных модификациях льда широкого набора фазовых переходов (ФП) [6] нами дополнительно был разработан и применен подход [7], позволяющий с помощью двух типов мессбауэровского зонда  $^{57}\text{Fe}$  диагностировать спиновые изомеры воды. Это с одной стороны, объясняет на качественном уровне указанную выше двойственность в поведении поверхностных жидких слоев льда, а с другой – дает

возможность исследовать упругие свойства для поверхностного льда (модуль сдвига, коэффициент Пуассона, параметр Грюнайзена). Этому в основном и посвящена настоящая работа.

### **1. Методика эксперимента**

Для широкого набора обменных форм минералов, представляющих собой интересующую для нас систему вида «раствор-монтмориллонит», был проведен необходимый мониторинг по сбору необходимой информации по кинетике трансформации соединений железа и детальному контролю их возможных мест локализации в исследуемых системах [5]. В результате для решения поставленной в настоящей работе задачи были выбраны два валентных состояния мессбауэровского зонда  $^{57}\text{Fe}$ . Первый тип представлял собой суперпозицию двух парциальных спектров с параметрами, типичными для катионов  $\text{Fe}^{2+}$ , находящихся в высоко спиновом состоянии и двух неэквивалентных положениях (формы 1 и 2 на рис. 1, а). Экспериментальный спектр второго типа характерен для трехвалентного железа, состоящего из димеров железа и аморфных полимерных пленок (кластеров) (1 и 2 на рис. 1, б соответственно). Мессбауэровские параметры для указанных выше типов зонда  $^{57}\text{Fe}$  подробно представлены в [5], при этом в рамках настоящей статьи нами ранее методом МС в [7] были установлены потенциальные возможности использования их для диагностики свойств переохлажденной воды.

Привлечение в исследуемую систему алюмосиликатной подложки объяснимо процессом гидратации монтмориллонита, т.е. образованию на поверхности глинистых частиц сплошной гидратной пленки «связанной» воды. При этом толщина такого слоя воды между алюмосиликатными пластинами оказалась точно кратна толщине одноатомного водного слоя, что было использовано при приготовлении образцов для решения поставленных задач. Технически контроль «толщины» адсорбированной водной пленки на алюмосиликатном носителе осуществлялся с помощью двух методических подходов. Первый подход применялся для получения толщин водных промежутков не более 2 нм и заключался в выдерживании образца в широком диапазоне равновесных относительных давлений паров воды ( $P/P_0 = 0.10-1.00$ , где  $P$  – заданное давление пара при  $20^\circ\text{C}$ ;  $P_0$  – давление насыщенного пара над поверхностью воды той же температуры). При этом необходимый диапазон значений  $P/P_0$  варьировался изменением упругости насыщенного пара воды, что достигалось использованием насыщенных растворов электролитов по методике, описанной в [8]. Процесс набухания монтмориллонита для получения толщины водной пленки более 2 нм выполнялся вторым подходом, при котором достигалось равновесие набухшей глины с водным раствором электролита (дополнительно согласно методике [9] параллельно  $\text{NaCl}$  использовали мессбауэровский зонд  $\text{FeCl}_3$ ).



**Рис. 1. Модельная расшифровка мессбауэровских спектров зондовых атомов  $^{57}\text{Fe}$  в системе «лёд – поверхность монтмориллонита»:**  
 а – 1 – форма 1 для  $\text{Fe}^{2+}$  и 2 – форма 2 для  $\text{Fe}^{2+}$ ;  
 б – 1 – димеры железа  $[\text{Fe}_2^{3+}(\text{OH})_2]^{4+}$  и 2 – кластеры железа

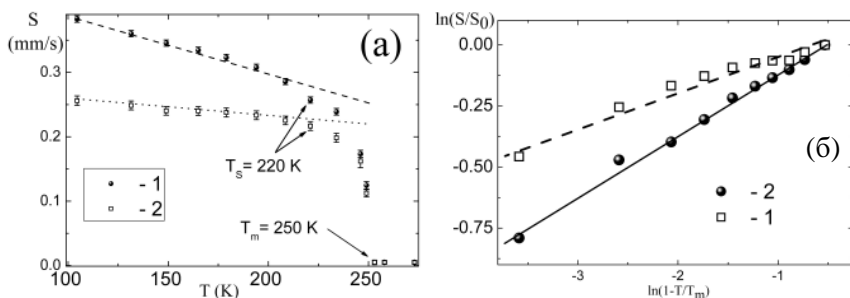
Для проведения мессбауэровских температурных исследований (90-330 К) использовали стандартный спектрометр, работающий в режиме постоянного ускорения источника  $^{57}\text{Co}$  (Cr). Математическая обработка экспериментальных спектров осуществлялась с помощью программного комплекса MSTools [10].

## 2. Результаты и обсуждение

«Структурный» анализ КЖС выполним в рамках фрактального формализма, обусловленного связью ( $d_f = d - \beta/\nu$ ) фрактальной размерности  $d_f$  перколяционного кластера с критическими индексами ( $\beta, \nu$ ), которые характеризуют наличие термофлуктуационных процессов в системе [11].

Для нахождения критических индексов воспользуемся установленным нами экспериментальным фактом, что температурное поведение вероятности эффекта Мёссбауэра ( $f' \approx S(T)$ ) вблизи критических точек носило сингулярный характер (рис. 2, а). Математическую процедуру обработки нормированной площади под мессбауэровским спектром проводили методом критических показателей ( $f' \propto S/S_0 = B(1 - T/T_m)^\beta$ ), традиционно применяемым при анализе критических явлений в жидкостях. Результат обработки (для наглядности иллюстрация представлена в логарифмическом масштабе (рис. 2, б)) и дополнительном использовании универсальных соотношений между показателями [12] позволили выполнить оценку величины фрактальной размерности ( $\langle d_f \rangle = 2.70$ ). Полученное среднее значение  $d_f$  для КЖС удовлетворительно согласуется с теоретическим значением фрактальной размерности, характерной для «губки» Менгера ( $d_f = \log 20 / \log 3 = 2.728$ ) [13].

Для анализа «чисто» кристаллических форм льда в отличие от КЖС был разработан другой подход, обусловленный связью параметра  $d_f$  с упругими свойствами межслоевого льда в минерале (модули Юнга  $E$  и сдвига  $G$ ). С целью согласования с мессбауэровскими данными нами была применена следующая методика. С одной стороны, следуя Френкелю, есть связь между модулем сдвига и коэффициентом вязкости объекта, а с другой – вязкость можно выразить через коэффициент диффузии [14]. Тогда оценка величины параметра  $d_f$  для льда, находящегося в межслоевом пространстве минерала, удовлетворительно согласуется с теоретическим значением фрактальной размерности, характерной для «губки» Менгера.



**Рис. 2.** Температурная зависимость интенсивности мессбауэровской линии (а) для димеров (форма 1) и кластеров (форма 2) железа в плёнке замороженной воды в глине и та же зависимость (б), обработанная в рамках метода критических показателей [12]: точки – эксперимент, пунктирные линии – математическая обработка в рамках дебаевского приближения для колебательного спектра ядра. Стрелки указывают на температуру фазового перехода ( $T_m$ ) и температуру начала процесса разупорядочения ( $T_s$ ) в плёнках льда

Неожиданно, применение описанной выше методики для квазиаморфного льда<sup>1</sup> дало неудовлетворительный результат. Действительно, экспериментально установленное изменение модуля сдвига всего на 30% по сравнению с кристаллическим льдом приводит к нефизическому значению коэффициента Пуассона для квазиаморфного льда ( $\mu = 1.00$ ).

Тогда как из теории упругости изотропных тел [15] следует, что коэффициент Пуассона обязан находиться в пределах  $-1 \leq \mu \leq 0.5$ . Для получения физически корректных значений  $\mu$  нами был специально разрабо-

<sup>1</sup> Название обусловлено тем, что характер температурного поведения мессбауэровских параметров отличается от подобных для «чисто» кристаллической фазы и типичен для начала процесса аморфизации кристаллических форм льда.

тан косвенный подход, основанный на установлении наряду со старыми параметрами ( $\mu = E/G - 1$ ) новых характеристик вещества, отражающих особенности деформации материала. Для решения поставленной задачи наиболее подходящим оказался параметр Грюнайзена, оценку величины которого для квазиаморфного льда проведем методом зондовой МС. Разработанная нами методика потенциально позволяет получить необходимую информацию из зависимости температуры Дебая от давления (или объема). Следуя подходу [16], при сжатии на величину  $\Delta V = V_1 - V_2$  изменение дебаевской температуры от начального значения  $\theta_0$  к конечному  $\theta$  определяется выражением, которое следует из соотношения  $\gamma = -\frac{d \ln \omega}{d \ln V}$  ( $\omega$  – частота обрезания Дебая и математические детали см., например, в [17]):

$$\mathcal{G} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{-\gamma} \mathcal{G}_0 \approx \left( 1 + \gamma \frac{\Delta V}{V_1} \right) \mathcal{G}_0. \quad (1)$$

При использовании (1) для расчета параметра Грюнайзена необходимо дополнительно провести температурные измерения для зонда  $\text{Fe}^{2+}$ . Далее из температурных зависимостей площади мессбауэровского спектра  $S(T)$  и температурного сдвига линии  $\delta(T)$  определялись оптимальные значения температуры Дебая в рамках МНК с помощью модифицированного метода линеаризации (пакет MSTools [10]). С другой стороны процедуру сжатия  $\Delta V$  возможно осуществить благодаря тому, что вода заполняет межслоевое пространство монтмориллонита послойно и при этом ее толщину можно строго фиксировать. С методической точки зрения процесс фиксации достигался с помощью выдерживания образца в широком диапазоне равновесных относительных давлений паров воды ( $P/P_0 = 0,0 \div 1,0$ ) (см. п. 2).

Применение формулы (1) привело к результату параметра Грюнайзена ( $\gamma = 0,11(4)$ ), значение которого аномально мало в сравнении как с кристаллическим льдом [18], так и с другими материалами.

Однако оценка коэффициента Пуассона ( $\mu = (4/3\gamma - 1)/(2\gamma + 1) = -0,699$ ) для квазиаморфного льда дала необычный результат, поскольку для подавляющего числа веществ  $\mu > 0$ . Дело в том, что при одноосном растяжении стержня из такого материала происходит его поперечное расширение, а не сжатие, как традиционно принято считать. Но такое поведение вещества принципиально не запрещено ( $-1 \leq \mu \leq 0,5$ ), и в настоящее время для подобных систем [19] принят термин ауксетичные (от греческого «auxetos»



– «разбухающий»). Следовательно, впервые с помощью метода зондовой МС установлено, что квазиаморфный лед ведет себя как ауксетик.

Для оценки фрактальной размерности поверхностного льда, обладающего ауксетичными свойствами, воспользуемся результатами теоретической работы [20], где на основе фрактальной модели неоднородной среды с хаотической структурой определены ее макроскопические упругие свойства. В частности, в зависимости коэффициента Пуассона от фрактальной размерности по сравнению с выражением ( $d_f = (d - 1)(1 + \mu)$ ) дополнительно присутствует параметр, ответственный за структуру материала. Тогда подбирая структуру неоднородной среды (варьируя координационное число  $Z$  перколяционной решетки), можно получить материал с наперед заданными свойствами (в нашем случае ауксетик). При решении задачи по определению числа  $Z$  косвенно учитывалась информация, полученная с помощью метода МС (анализ лигандного окружения мессбауэровского зонда в состоянии  $\text{Fe}^{2+}$  и  $\text{Fe}^{3+}$  в различных железосодержащих водных и неводных растворах [3], оценка ГЭП на ядрах  $^{57}\text{Fe}$  для димеров железа [5] с последующей его корреляцией с температурными зависимостями параметров спектров [7]). Полученная оценка величины фрактальной размерности для квазиаморфного льда ( $d_f = 0.616$ ), находящегося в межслоевом пространстве минерала, удовлетворительно согласуется с теоретическим значением, характерным для «пыли» Кантора ( $d_f = \log 2 / \log 3 = 0.6309$ ) [13].

Таким образом, изложенные выше результаты показывают, что перестройка структуры льда на топологическом языке представляет собой трансформацию одного монофрактала ( $d_f = 2.70$ ) в другой ( $d_f = 0.616$ ).

### **Заключение**

Использование зондовой МС на ядрах  $^{57}\text{Fe}$  позволило впервые исследовать структуру КЖС «поверхностного» льда при контакте с глиной. В прикладном аспекте наши результаты можно использовать для корректного построения отсутствующего на настоящий момент объяснения механизма «получения» природных нанотрубок. Кроме того, второй момент связан с проблемой обнаружения «жидкой» воды на Марсе, которая является неотъемлемым компонентом для существования жизни, но ее поиск складывается не совсем успешно. Однако, как было показано в настоящей работе, проблема может быть частично снята, поскольку диагностика с помощью метода МС наличия КЖС на поверхности льда является характерным признаком присутствия «свободной» воды на Марсе.

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Rosenberg R. Why Is Ice Slippery? // Physics Today. 2005. December. P. 50–55.*

2. *Burger K.* Capillary Mössbauer spectroscopy for solution chemistry / K. Burger, A. Vértes // *Nature*. 1983. Vol. 306, no. 5941. P. 353-354.
3. *Vertes A.* Mössbauer Spectroscopy of Frozen Solutions / A. Vertes, D.L. Nagy, Budapest: Akademiai Kiado, 1990. 303 p.
4. *Захаров С.Д.* Кластерная структура воды (обзор) / С.Д. Захаров, И.В. Мосягина. Препринт № 11 ФИАН. М., 2011. 11 с.
5. *Залуцкий А.А.* Физические методы исследования твёрдофазных реагентов и катализаторов: Монография / А.А. Залуцкий, Е.Г. Степанов. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2005. 312 с.
6. *Залуцкий А.А.* Изучение особенностей фазовых переходов в системе «железо-поверхность наноглин» с помощью мёссбаэровской спектроскопии // *Письма в ЖТФ*. 2014. Т. 40, вып. 20. С. 54-61.
7. *Zalutskii A.A.* Mössbauer Study of Dynamic and Phase Transitions in an Aqueous Film– Nanoclay Surface System / A.A. Zalutskii, N.A. Sed'mov, E.N. Shkol'nikov, V.V. Morozov // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. 2017. Vol. 81, No. 7. P. 812–816. Original Russian Text A.A. Zalutskii, N.A. Sed'mov, E.N. Shkol'nikov, V.V. Morozov, 2017, published in *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk, Seriya Fizicheskaya*. 2017. Vol. 81, No. 7. P. 898–903.
8. *Воронин А.Д.* Структурно-функциональная гидрофизика почв. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1984. 204 с.
9. *Lagaly Von G.* Uber quasikristalline Strukturen bei der Flockung von Montmorilloniten und die Ausbildung diffuser Ionendoppelschichten in Nitrobenzol / Von G. Lagaly, H. Stange, A. Weiss // *Kolloid-Z. u. Z. Polymere*. 1972. Vol. 250. P. 675.
10. *Русakov В.С.* Мёссбаэровская спектроскопия локально неоднородных систем. Алматы, 2000, 431 с.
11. *Соколов И.М.* Размерности и другие геометрические критические показатели в теории протекания // *Успехи физ. наук*. 1986. Т. 150, вып. 2. С. 221-255.
12. *Паташинский А.З.* Флуктуационная теория фазовых переходов / А.З. Паташинский, В.Л. Покровский. М.: Наука, 1975. 256 с.
13. *Mandelbrot B.B.* The Fractal Geometry of Nature. New York: W. H. Freeman, 1983. 497 p.
14. *Френкель Я.И.* Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1975. 592 с.
15. *Ландау Л.Д.* Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. М.: Наука, 1965. 204 с.
16. *Штинель В.С.* Резонанс гамма-лучей в кристаллах. М.: Наука, 1969. 407 с.
17. *Paskin A.A.* Reformulation of the Temperature Dependence of the Debye Characteristic Temperature and its Effect on Debye-Waller Theory // *Acta Cryst.* 1957. Vol. 10. P. 667- 669.
18. *Petrenko V.F.* Physics of ice / V.F. Petrenko, R.W. Whitworth. Oxford University-Press. 2002. 347 p.
19. *Конек Д.А.* Материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона (Обзор) / Д.А. Конек, К.В. Войцеховски, Ю.М. Плесакачевский, С.В. Шилько // *Механика композитных материалов и конструкций*. 2004. Т. 10, № 1. С. 35-69.
20. *Новиков В.В.* Отрицательный коэффициент Пуассона фрактальных структур / В.В. Новиков, К.В. Wojciechowski // *ФТТ*. 1999. Т. 41, вып. 12. С. 2147-2153.

# Содержание

## МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

1. **Башкин М.А.** Однородные нерасщепимые супермногообразия, связанные с комплексной проективной прямой..... 3
2. **Бородин А.В.** Барисинтез многомерного изоспектрального уравнения Шредингера..... 6
3. **Букушева А.В.** Геодезические подмногообразия распределений субримановых многообразий..... 23
4. **Галаев С.В.** О геодезических преобразованиях распределений нулевой кривизны многообразий Сасаки..... 27
5. **Медведева Л.Б., Сидорова Л.А.** Об одной плоской модели четырехмерного проективного пространства..... 33
6. **Очиров А.А., Белоножко Д.Ф.** О влиянии поверхностного электрического заряда и скорости относительного движения жидких сред на дрейф Стокса..... 43
7. **Ройтенберг В.Ш.** О бифуркациях векторных полей на плоскости, инвариантных относительно вращений..... 46
8. **Тихонова А.Д., Абрамов В.В.** О колебаниях фондов в модели Солоу.... 56

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

9. **Башкин М.А., Бурцев А.И., Васильева А.В. Березина Л.В.** Задачи IV Межрегиональной студенческой олимпиады по математике (II этап Всероссийской студенческой олимпиады)..... 61
10. **Жаров А.Н., Жарова И.Г., Овчинников С.В.** О преподавании темы: коды Хэмминга..... 73
11. **Зудин В.Л.** Организация изучения технической дисциплины в вузе..... 78
12. **Гулевич Н.М., Кузнецов В.О.** О пределе последовательности..... 85
13. **Леонтьев В.К., Кораблева О.Н.** К выводу основного уравнения центробежного насоса..... 91
14. **Леонтьев В.К., Кораблева О.Н., Киселева А.А.** Определение коэффициента гидравлического трения..... 95
15. **Оленикова Ю.К., Ройтенберг В.Ш.** О ярославских студенческих математических олимпиадах 2018 года..... 99
16. **Селеменова Т.А.** Педагогическое проектирование компетентностно-ориентированного обучения математике в вузе..... 109
17. **Трофимец Е.Н.** Онлайн-обучение в контексте математического образования..... 113

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

18. **Андреев А.С., Лискина Е.Ю.** Моделирование влияния факторов производственного потенциала на экономическое развитие регионов России..... 117
19. **Балушкин А.Л.** Особенности определения деформативных характеристик сцепления в расчетах железобетонных стержневых конструкций при режимных нагрузениях..... 122

20.	<b>Барцева А.Ю., Бельман С.А.</b> Математическая модель эффективной трудовой деятельности в образовательном учреждении.....	131
21.	<b>Гирба Е.А., Кораблева О.Н.</b> Коэффициент инъекции жидкогазовых инъекционных аппаратов.....	134
22.	<b>Гусаров А.В., Гусарова Н.И.</b> Совершенствование математической модели распределения потока отраженных электронов.....	138
23.	<b>Казаров Е.Г., Рудаков А.М.</b> Определение соответствия выпускника военного вуза виду профессиональной военной деятельности.....	144
24.	<b>Королев Л.В., Бытев Д.О.</b> Моделирование случайного транспорта в ограниченной среде с ловушками.....	154
25.	<b>Лискина Е.Ю., Щукина И.П.</b> Моделирование трудовой привлекательности регионов Российской Федерации.....	161
26.	<b>Наумов В.А.</b> Закон распределения максимальных годовых уровней воды в реке Преголи.....	165
27.	<b>Панкратов И.А., Симонова К.Р.</b> Математическое моделирование обтекания пластины средствами OpenFOAM.....	171
28.	<b>Попов Ю.Г., Чабуткин Е.К., Тарасова Н.Е.</b> Моделирование технологического процесса уплотнения асфальтобетонных покрытий.....	175
29.	<b>Сычева Т.А., Буланов А.Н.</b> Математическая вероятность при расчете возникновения отказов.....	183
30.	<b>Титова Е.В., Абрамов В.В.</b> Принятие решения об оптимизации потока объемов сбыта одного продукта.....	190
31.	<b>Украженко О.К., Украженко К.А.</b> Расчет инструмента для обработки сложнопрофильных внутренних поверхностей на многоцелевых станках методом протягивания.....	197
32.	<b>Фурманов Д.В., Клочко Н.Н., Чижов В.С.</b> Экспериментальная оценка рациональных углов заострения зубьев машин для разработки прочных дорожно-строительных материалов.....	204
33.	<b>Боровков В.Д., Васильков Ю.В.</b> Моделирование синтеза систем регулирования многосвязных объектов с использованием добротности системы.....	209

### **КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ НАУКИ**

34.	<b>Кузин А.В.</b> Об одном приложении формулы Таппера к стеганографии.....	216
35.	<b>Марьясин О.Ю., Белов М.А.</b> Моделирование системы смешанного управления с разными типами регуляторов.....	223

### **БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ И НАУКИ О ЗЕМЛЕ**

36.	<b>Ермишин А.С.</b> Об исследовании адаптации животных методом корреляционной адаптометрии.....	234
37.	<b>Залуцкий А.А.</b> Зондовая мессбауэровская диагностика структуры квазижидкого слоя поверхностного льда при контакте с природной глиной...	242

Научное издание

**МАТЕМАТИКА  
И  
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

**ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА**

**Выпуск 14**

Ответственный редактор А.Н. Жаров

Редактор М.А. Канакотина

Подписано в печать 15.03.19. Формат 60x84 1/16. Бумага белая.  
Гарнитура Таймс. Офсетная печать  
Усл. печ. л. 14,64. Уч.-изд. л. 14,62. Тираж 25. Заказ

Ярославский государственный технический университет  
152023, Ярославль, Московский пр., 88

Издательский дом ЯГТУ  
150000, Ярославль, ул. Советская, 14а